Invariants:

i)
$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div} J = 0 \\ \rho(r,t) = N_1(t+\tau, r+\lambda) + N_2(t+\tau, r-\lambda) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boxed{J = -D \frac{\partial}{\partial r}\rho(r)} \qquad (\text{idem } J = -D \operatorname{grad}\rho) \qquad (19)$$

ii) relation de dispersion pour la solution exacte du système :

$$e^{2i\omega\tau} - 2p \cdot \cos(k\lambda)\, e^{i\omega\tau} + 2p - 1 = 0 \qquad (20)$$

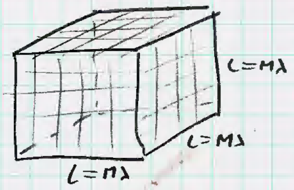
et $A(t) = e^{i\omega t} A(0)$ donc une grandeur est conservée au cours du temps si $e^{i\omega\tau} = 1$, donc (20) devient :

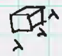
$$1 - 2 \cdot p \cdot \cos(k\lambda) + 2p - 1 = 0$$

$$\Longrightarrow \cos(k\lambda) = 1$$

$$\Longrightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} n \quad , n \in \mathbb{Z} \qquad (21)$$

Mais : notre système est cube C.B.P



maille : 

$$\Longrightarrow k \in \left\{\frac{2\pi}{L} m\right\}_{m=0}^{M-1} \qquad (22)$$

(21) et (22) $\Longrightarrow$

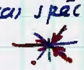
$$\exists \text{sol} : k = 0 \qquad (23)$$

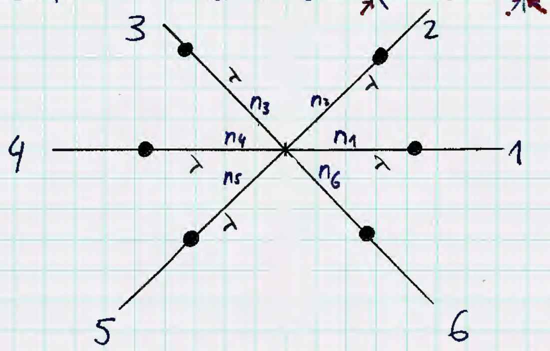
$$\Longrightarrow N = \text{cte} = \sum_{r \in \Lambda} \rho(r)$$

iii) autre grandeur conservée : $\rho_{\pi/\lambda} = N_{even} - N_{odd}$ (différence de nb. de particules entre sites pairs/imp.)

Modèle FHP (Frisch, Hasslacher, Pomeau)

Description : – fluide 2D (1986)
– à voir : mvt. microscopique dynamique discret $\longrightarrow$ macroscopique hydrodynamique

Règle de collision : – réseau hexagonal (raisons d'isotropie)
– approche microscopique : conserv. masse + impulsion + symétries $\longrightarrow$ limite macrosc. = Nav. Stokes.
– dynamique : – variables booléennes (6)
– pas plus de 1 particule qui entre le m̂. site avec une m̂. vitesse
– en $t_{i+1} - t_i \longrightarrow$ noeud via noeud voisin
– interaction $\Longleftrightarrow$ 2 particules au m̂. endroit au m̂. moment (aux noeuds du réseau)
– collision : à 60° sauf cas spéciaux
– cas particulier : collision $\Leftrightarrow$  ou 

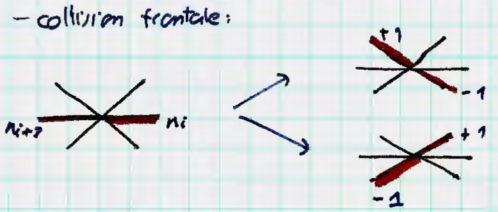


$$\begin{cases} \bar{V}_i = \dfrac{\lambda}{\tau}\, \bar{e}_i & (24) \\ n_i(r,t) & (25) \end{cases}$$

<u>Microdynamique</u> : – sans interaction :

$$n_i(\vec{r}+\lambda\hat{e}_i\,,\,t+\tau) = n_i(\vec{r},t) \qquad (26)$$

– collision frontale :



$$\Longrightarrow \quad \underline{D_i = \underbrace{n_i n_{i+3}}_{\substack{=1 \text{ si coll.}\\ \text{comme ci-dessus}}} \underbrace{(1-n_{i+1})(1-n_{i+2})(1-n_{i+4})(1-n_{i+5})}_{=0 \text{ si il y a une autre particule}}} = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists \text{ telle coll.} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

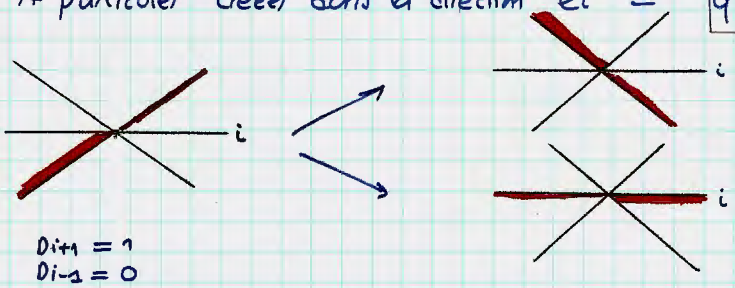
$\Longrightarrow$ $\boxed{n_i - D_i} \in \{0,1\}$ – donne le nb. de particules qui restent après une telle collision. (26')
Vaut 1 avant la collision, 0 après...
– mais si $D_i = 0$ avant la collision, il se peut que $n_i \neq 0$ après la collision avec toujours $D_i = 0$.

mais :

$\Longrightarrow$ on introduit une variable booléenne aléatoire $q(r,t)$ qui donne la direction de déflection de la particule :

$$q = \begin{cases} 1 & \text{si défléchi vers la DROITE} \\ 0 & \text{si défléchi vers la GAUCHE} \end{cases} \quad ; \text{ isotropie : } \langle q \rangle = \tfrac{1}{2}$$

"#" particules créées dans la direction $\hat{e}_i$ = $\boxed{q\, D_{i-1} + (1-q)\, D_{i+1}}$ (27)



$D_{i+1} = 1$
$D_{i-1} = 0$

$q\, D_{i-1} + (1-q)\, D_{i+1} = 1-q = 0$
$q = 1$: vers la droite

$q\, D_{i-1} + (1-q)\, D_{i+1} = 1-q = 1$
$q = 0$: vers la gauche

– collision à trois corps :

$$\underline{T_i = n_i n_{i+2} n_{i+4} (1-n_{i+1})(1-n_{i+3})(1-n_{i+5})} \qquad (28)$$

– modification du nb. de particules dans la direction $\hat{e}_i$:

$$\boxed{\underbrace{n_i}_{\text{nb. actuel}} - \underbrace{T_i}_{\substack{\text{il y aura}\\ \text{perte de 1}\\ \text{part.}}} + \underbrace{T_{i+3}}_{\substack{\text{il y aura création d'une particule sur } i}}} \quad \to \text{ou } T_{i+1} \text{ ... idem.} \qquad (29)$$

$\Longrightarrow$ la microdynamique de ce système où $\exists$ que 2 types de collisions et donc :

$$\boxed{n_i(\vec{r}+\lambda\cdot\hat{e}_i\,,\,t+\tau) = \underbrace{n_i(\vec{r},t)}_{\substack{\text{nb. initial de}\\ \text{particules}}} \underbrace{-D_i}_{\substack{\text{si une collision}\\ \text{frontale se produit,}\\ \text{il y a perte de une unité}}} + \underbrace{q\, D_{i-1} + (1-q)\, D_{i+1}}_{\substack{\text{création de}\\ \text{particule si}\\ \text{collision de}\\ \text{paire pas sur}\\ \hat{e}_i}} \underbrace{-T_i + T_{i+3}}_{\substack{\text{modification du}\\ \text{nb. de particules si}\\ \text{collision à 3 corps.}}}} \qquad (30)$$

$$\boxed{\begin{aligned} D_i &= n_i n_{i+3} (1-n_{i+1})(1-n_{i+2})(1-n_{i+4})(1-n_{i+5}) \\ T_i &= n_i n_{i+2} n_{i+4} (1-n_{i+1})(1-n_{i+3})(1-n_{i+5}) \end{aligned}} \qquad (31)$$

↳ NUMÉRIQUE : FACILE !

<u>Macrodynamique</u> : $N_i(\vec{r},t) = \langle n_i(\vec{r},t) \rangle$: $n_i \in \{0,1\}$; $N_i \in [0,1]$ $\Longrightarrow$ densités de proba !

$$\rho(\vec{r},t) = \sum_{i=1}^{6} N_i(\vec{r},t) \qquad \text{DENSITÉ} \qquad (32)$$

$$j(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)\cdot\vec{u}(\vec{r},t) = \sum_{i=1}^{6} N_i(\vec{r},t)\cdot\vec{v}_i \quad , \quad \vec{v}_i = \frac{\lambda}{\tau}\hat{e}_i \qquad \text{COURANT} \qquad (33)$$

$$\Pi_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{6} v_{i\alpha} v_{i\beta} N_i(\vec{r},t) \qquad \text{TENSEUR DES MOMENTS} \qquad (34)$$

- Développement multi-échelle et de Chapman–Enskog :

— à étudier : à une échelle d'observation appropriée, les équations discrètes décrivent le monde macroscopique.
— la moyenne de (30) donne :

$$\begin{cases} N_i(\bar r + \lambda \hat e_i, t+\tau) - N_i(\bar r, t) = \langle \Omega_i \rangle & (35) \\ \langle \Omega_i \rangle = -\langle T_i \rangle + \langle T_{i+3} \rangle - \langle D_i \rangle + \frac{1}{2}\langle D_{i-1} \rangle + \frac{1}{2}\langle D_{i+1} \rangle & (36) \end{cases}$$

↳ toujours des équations discrètes, mais pour des échelles

$$\begin{cases} L \gg \lambda \\ T \gg \tau \end{cases} \qquad (37)$$

on suppose que (35) devient régulier dans l'espace et le temps.
⟹ on peut développer (35) par Taylor (les dérivées existent) sur les variables $\bar r, t$:

$$N_i(\bar r + \lambda \hat e_i, t+\tau) = N_i(\bar r, t) + \begin{pmatrix} \tau \partial_t \\ \lambda \hat e_i \cdot \bar\nabla \end{pmatrix} N_i(\bar r + \lambda \hat e_i, t+\tau)\Big|_{\lambda=\tau=0} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \tau^2 \partial^2_{tt} & \lambda\tau(\hat e_i\cdot\nabla)\partial_t \\ \lambda\tau(\hat e_i\cdot\nabla)\partial_t & \lambda^2(\hat e_i\cdot\bar\nabla)^2 \end{pmatrix} N_i(\ldots)\Big|_{\ldots=0} + \ldots$$

$$\overset{(35)}{\Longrightarrow} \quad \tau \frac{\partial}{\partial t} N_i(\bar r, t) + \lambda(\hat e_i\cdot\bar\nabla) N_i(\bar r, t) + \frac{1}{2}\tau^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} N_i(\bar r, t) + \frac{1}{2}\lambda^2(\hat e_i\cdot\bar\nabla)^2 N_i(\bar r, t) + \lambda\cdot\tau\cdot(\hat e_i\cdot\bar\nabla)\frac{\partial}{\partial t} N_i(\bar r, t) = \langle \Omega_i \rangle \qquad (38)$$

— pour trouver la solution de (38), il faut faire des approximations :

1) Développement de Chapman–Enskog :

$$N_i = N_i^{(0)} + \varepsilon N_i^{(1)} + \ldots = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k N_i^{(k)} \qquad (39)$$

La solution ne sera pas forcément unique, et on devra donc imposer des conditions supplémentaires :

$$\rho = \sum_{i=1}^{6} N_i^{(0)} \qquad \rho\cdot\bar u = \sum_{i=1}^{6} \bar v_i N_i^{(0)} \qquad (40)$$

c'est-à-dire qu'à l'ordre le plus bas ε^0 on a les valeurs moyennes, et que les ordres supérieurs donnent les fluctuations :

$$\sum_{i=1}^{6} N_i^{(\ell)} = 0 \ \forall \ell \quad ; \quad \sum_{i=1}^{6} \bar v_i N_i^{(\ell)} = 0 \ \forall \ell \qquad (41)$$

mieux : $\rho = \int_0^{2\pi} d\theta\, N_\theta^{(0)}$ si on fait réellement le passage au continu… c'est même très surprenant qu'on arrive à Navier–Stokes sans faire d'intégration… enfin, pas tant que ça car $\sum_{i=1}^{6}$ n'est ici qu'une notation, on n'utilise pas explicitement la chose, donc on peut le remplacer par une intégration sans autres, d'où… ça montre que <u>le résultat final ne dépend pas explicitement du choix de la maille</u> ! Surprenant !

— on ne peut plus rien dire sur $\frac{\lambda}{\tau}$: dépend des pas de temps ! t petit ⟹ balistique $\frac{\lambda}{\tau} \sim$ cte ; t grand ⟹ $\frac{\lambda^2}{\tau} \sim$ cte : diffusif…

2) Approche multi-échelle : introduit des temps macroscopiques T_1, T_2 tels que :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\tau}{T_1} &= O(\varepsilon) & (42) \\ \frac{\tau}{T_2} &= O(\varepsilon^2) & (43) \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_2 \gg T_1 \gg \tau \text{ (1 ordre de plus)}$$

(en général $\frac{\tau}{T_k} = O(\varepsilon^k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$) (T_0 est microscopique…)

et les longueurs macroscopiques telles que

$$\frac{\lambda}{L_1} = O(\varepsilon) \ \ldots \qquad \frac{\lambda}{L_k} = O(\varepsilon^k), \ k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (44)$$

Variables temporelles t_1, t_2 t.q.

$$t = \frac{t_1}{\varepsilon} + \frac{t_2}{\varepsilon^2} \quad ; \quad t_2 \ll t_1 \ll t \qquad (45)$$

(attention : ici c'est le contraire…) bizarre…

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} \qquad (46)$$

variable spatiale macroscopique :

$$\bar{r} = \frac{\bar{r}_1}{\varepsilon} \quad ; \quad |\bar{r}_1| << |\bar{r}| \quad \text{bizzare...} \tag{47}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r_\alpha} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial r_{1\alpha}} \tag{48}$$

– propriétés du terme de collision:

$$\sum_{i=1}^{6} \Omega_i = \sum_{i=1}^{6} \bar{v}_i \Omega_i = 0 \tag{49}$$

(à cause des symétries des collisions)

– en utilisant :

(48), (46), (3)9) dans (38) avec sommation $\sum_{i=1}^{6}$, $O(\varepsilon)$

calculs

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{6} \left(\tau\, \partial_{t_1} N_i^{(0)} + \lambda\, e_{i\beta} \partial_{1\beta} N_i^{(0)} \right) = 0 \tag{50}$$

$$\sum_{i=1}^{6} \left(\tau\, \partial_{t_1} e_{i\alpha} N_i^{(0)} + \lambda\, e_{i\alpha} e_{i\beta} \partial_{1\beta} N_i^{(0)} \right) = 0 \tag{51}$$

$$\overset{(50)}{\Rightarrow} \underbrace{\tau}_{= O(\varepsilon)\cdot T_1} \frac{\partial}{\partial t_1} \underbrace{\sum_{i=1}^{6} N_i^{(0)}}_{= \rho} + \underbrace{\lambda}_{= O(\varepsilon)\cdot L_1} \underbrace{\sum_{i=1}^{6} \underbrace{\sum_{\beta=1}^{2} e_{i\beta} \partial_{1\beta}}_{= \hat{e}_i \cdot \bar{\nabla}_1} N_i^{(0)}}_{= \sum_{i=1}^{6} (\hat{e}_i \cdot \bar{\nabla}_1) N_i^{(0)}} = 0$$

$$\overset{O(\varepsilon)}{\Rightarrow} \frac{\partial}{\partial t_1} \rho + \sum_{i=1}^{6} \left(\frac{L_1}{T_1} \hat{e}_i \cdot \bar{\nabla}_1 \right) N_i^{(0)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t_1} \rho + \bar{\nabla}_1 \cdot \sum_{i=1}^{6} \underbrace{\frac{L_1}{T_1} \hat{e}_i}_{\overset{?}{=} \bar{v}_i} N_i^{(0)} = 0$$

– il faudrait donc que: $\bar{v}_i$

i.e. $\underbrace{\frac{L_1}{T_1}}_{\simeq \frac{\Delta x}{\Delta t}} \hat{e}_i = \bar{v}_i$,

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t_1} \rho + \bar{\nabla}_1 \underbrace{\sum_{i=1}^{6} \bar{v}_i N_i^{(0)}}_{= \rho . \bar{u}} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\frac{\partial}{\partial t_1} \rho + \mathrm{div}_1\, \rho \bar{u} = 0 \quad : \text{éq. continuité}} \tag{52}$$

idem pour (51) et on obtient,

$$\underline{\frac{\partial}{\partial t_1} \rho . u_\alpha + \sum_{\beta=1}^{2} \frac{\partial}{\partial r_{1\beta}} \Pi^{(0)}_{\alpha\beta} = 0 \quad : \text{éq. conserv. moment (Euler)}} \tag{53}$$

$O(\varepsilon^2)$:

$$\underline{\frac{\partial}{\partial t_2} \rho \cancel{u_\alpha} = 0} \quad : \text{à l'échelle } T_2 \text{, les variations de densité } \text{~~}\text{sont négligeables} \tag{54}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_2} \rho u_\alpha + \frac{\partial}{\partial r_{1\beta}} \left(\Pi^{(1)}_{\alpha\beta} + \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t_1} \Pi^{(0)}_{\alpha\beta} + \frac{\partial}{\partial r_{1\gamma}} S^{(0)}_{\alpha\beta\gamma} \right) \right) = 0$$

terme dû à la nature discrète du problème,

$$\underline{\frac{\partial}{\partial t_2} \rho u_\alpha + \sum_{\beta=1}^{2} \frac{\partial}{\partial r_{1\beta}} \Big(\underbrace{\Pi^{(1)}_{\alpha\beta} + \frac{\tau}{2} \Big(\frac{\partial}{\partial t_1} \Pi^{(0)}_{\alpha\beta} + \sum_{\gamma=1}^{2} \frac{\partial}{\partial r_{1\gamma}} S^{(0)}_{\alpha\beta\gamma} \Big)}_{\text{composantes dissipatives à l'éq}^{n}\text{ de Euler}} \Big)} \tag{55}$$

, $\alpha = 1,2$.

comp. dissip. du

Sommer les contributions aux ordres ε et ε^2 donnent l'éqn. du syst. : (55) + (53) $\Rightarrow$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t_1}\rho u_\alpha + \sum_{\beta=1}^{2}\frac{\partial}{\partial r_{1\beta}}\Pi^{(0)}_{\alpha\beta}}_{=O(\varepsilon)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t_2}\rho u_\alpha + \sum_{\beta=1}^{2}\frac{\partial}{\partial r_{1\beta}}\Big(\ldots\Big)}_{=O(\varepsilon^2)} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial t_2}\right)}_{=\frac{\partial}{\partial t}}\rho u_\alpha + \sum_{\beta=1}\underbrace{\varepsilon\frac{\partial}{\partial r_{1\beta}}}_{=\frac{\partial}{\partial r_\beta}}\Big(\Pi^{(0)}_{\alpha\beta} + \varepsilon(\ldots)\Big) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\rho u_\alpha + \sum_{\beta=1}^{2}\frac{\partial}{\partial r_\beta}\Bigg(\underbrace{\Pi^{(0)}_{\alpha\beta} + \varepsilon\,\Pi^{(1)}_{\alpha\beta}}_{\substack{=\Pi_{\alpha\beta}\\ (\text{à l'ordre } 2)}} + \varepsilon\frac{\tau}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial t_1}\Pi^{(0)}_{\alpha\beta} + \sum_{\gamma=1}^{2}\frac{\partial}{\partial r_{1\gamma}}S^{(0)}_{\alpha\beta\gamma}\Big)\Bigg) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\rho u_\alpha + \sum_{\beta=1}^{2}\frac{\partial}{\partial r_\beta}\Bigg(\Pi_{\alpha\beta} + \frac{\tau}{2}\Big(\varepsilon\frac{\partial}{\partial t_1}\Pi^{(0)}_{\alpha\beta} + \sum_{\gamma=1}^{2}\underbrace{\varepsilon\frac{\partial}{\partial r_{1\gamma}}}_{=\frac{\partial}{\partial r_\gamma}}S^{(0)}_{\alpha\beta\gamma}\Big)\Bigg) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\rho u_\alpha + \sum_{\beta=1}^{2}\frac{\partial}{\partial r_\beta}\Bigg(\Pi_{\alpha\beta} + \frac{\tau}{2}\Big(\varepsilon\frac{\partial}{\partial t_1}\Pi^{(0)}_{\alpha\beta} + \sum_{\gamma=1}^{2}\frac{\partial}{\partial r_\gamma}S^{(0)}_{\alpha\beta\gamma}\Big)\Bigg) = 0 \quad : \text{N.-Stokes} \quad (56)$$

Pour les autres équations : (52) + (54) $\Rightarrow$

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial t_1}\rho + \varepsilon\,\mathrm{div}_1\,\rho.\bar{u} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial t_2}\rho = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial t_2}\right)}_{=\frac{\partial}{\partial t}}\rho + \underbrace{\varepsilon\,\nabla_1}_{=\nabla}\cdot(\rho.\bar{u}) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\rho + \mathrm{div}(\rho.\bar{u}) = 0 \quad : \text{CONTINUITÉ} \quad (57)$$

<u>Remarque</u> : – (56) est l'éqn. de Navier-Stokes, qui est la conséquence des hypothèses implicites de la conservation de la qtté de mvt. et du nb. de particules de notre modèle.
– (56) n'est pas explicitement de la m. forme que N.-Stokes : Π et S doivent être exprimés en fct. de $\bar{u}$ et ρ.
– règle de collision $\Rightarrow$ détermine la forme de Π et S : $\Pi = \Pi$ (règle de coll.)
$S = S$ (règle de coll.)

<u>Eqn. Boltzmann</u> : – hypothèse : $\langle n_i n_j\rangle = \langle n_i\rangle\langle n_j\rangle = N_i N_j$: indép. ! Pas de corrél. !
$\longrightarrow$ ⚠ dans des syst. réaction-diffusion, les corrél. sont importantes !
↳ cette hyp. est appelée hyp. de Boltzmann.

$$\Rightarrow \langle \Omega(\{n_i\}_{i=1}^{6})\rangle = \Omega(\{N_i\}_{i=1}^{6}) \qquad (58)$$

$\Rightarrow$ on développe l'équation (38) avec l'hyp. (58) pour obtenir l'éqn. dite de Boltzmann.

<u>Développ. de Chapman-Enksog</u> : avec $N_i = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k N_i^{(k)}$

$$\Omega_i(N) = \Omega_i(N^{(0)}) + \varepsilon\sum_{j=1}^{6}\left(\frac{\partial\Omega_i(N^{(0)})}{\partial N_j}\right)N_j^{(1)} + O(\varepsilon^2) \qquad (59)$$

et en réutilisant le développement multiéchelle en égalant les puissances de ε :

$$O(\varepsilon^0) : \quad \Omega_i(N^{(0)}) = 0 \qquad (60)$$

$$O(\varepsilon^1) : \quad \frac{\partial}{\partial t_1}N_i^{(0)} + \sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial r_{1\alpha}}V_{i\alpha}N_i^{(0)} = \frac{1}{\tau}\sum_{j=1}^{6}\left(\frac{\partial\Omega_i(N^{(0)})}{\partial N_j}\right)N_j^{(1)} \qquad (61)$$

– de (60) on trouve $N_i^{(0)}$, que l'on réinjecte dans (61) pour trouver $N_i^{(1)}$. Problème :

$$\left\{ \frac{\partial \Omega_i}{\partial N_j} \right\}_{ij=1}^{6} \not\in Gl_6(\mathbb{R}) \tag{62}$$

– mais : lois de conservation

$$\sum_{i=1}^{6} \Omega_i = 0 \implies \underbrace{\sum_{i=1}^{6} \Omega_i (N^{(0)})}_{=0} + \varepsilon \sum_{i=1}^{6} \left(\frac{\partial \Omega_i (N^{(0)})}{\partial N_j} \right) N_j^{(1)} + O(\varepsilon^2) = 0$$

$$\implies \sum_{i=1}^{6} \left(\frac{\partial \Omega_i}{\partial N_j} \right) = \frac{\partial}{\partial N_j} \underbrace{\sum_{i=1}^{6} \Omega_i}_{=0} = 0 \tag{63}$$

– de m. pour la vitesse $\sum_{i=1}^{6} \bar{v}_i \Omega_i = 0 \implies$

$$\sum_{i=1}^{6} e_{i\alpha} \underbrace{\left(\frac{\partial \Omega_i}{\partial N_j} \right)}_{:= \tilde{\Omega}_{ij}} = 0 \tag{64}$$

$$\implies \sum_{i=1}^{6} e_{i\alpha} \tilde{\Omega}_{ij} = 0 \qquad \forall \alpha \in \{1,2\} \quad \forall j \in \{1, \dots, 6\}$$

– si $\sum_i c_i a_{ij} = 0 \quad \forall j$, cela veut dire que les colonnes sont linéairement dépendantes.

$$e_\alpha^t \tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies \tilde{\Omega}^t e_\alpha = (0 \ 0 \ 0)$$

(63) s'écrit :

$$\tilde{\Omega}^t E_0 = 0 \ , \qquad E_0 = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1) \tag{65}$$

(64) s'écrit :

$$\tilde{\Omega}^t E_1 = \tilde{\Omega}^t E_2 = 0 \ , \qquad \begin{aligned} E_1 &= (e_{11} \ e_{21} \ e_{31} \ e_{41} \ e_{51} \ e_{61}) & (66) \\ E_2 &= (e_{21} \ e_{22} \ e_{32} \ e_{42} \ e_{52} \ e_{62}) & (67) \end{aligned}$$

– $\{E_i\}_{i=0}^{2} \equiv$ <u>invariants de collision</u>

$$N \cdot E_0 = \rho \ , \qquad N = (N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6) \tag{68}$$

$$V \cdot N \cdot E_1 = \rho \cdot u_1 \tag{69}$$

$$V \cdot N \cdot E_2 = \rho \cdot u_2 \tag{70}$$

– pb. : trouver la sol. de (61)

$$\underbrace{\partial_{t_1} N_i^{(0)} + \partial_{1\alpha} V_{i\alpha} N_i^{(0)}}_{\bar{X}} = \frac{1}{\tau} \tilde{\Omega} \cdot N^{(1)} \tag{71}$$

$$\implies \bar{X} = \frac{1}{\tau} \tilde{\Omega} \cdot N_i^{(1)}$$

$\implies \bar{X} \in Im(\tilde{\Omega})$ (l'image), car on veut une solution différente de 0 : en effet, si ce n'était pas le cas, alors (71) ne serait vrai que pour certains $N_i^{(0)}$, or les $N_i^{(0)}$ sont déjà donnés par une autre éqn., donc connus, et ne peuvent pas varier de façon à ce que (71) serait vérifiée dans sa nullité. Ainsi on a bien $\bar{X} \neq 0$. Résumons :

$$\frac{1}{\tau} \Omega \cdot N^{(1)} = \bar{X} \neq 0 \tag{72}$$

$$\tilde{\Omega}^t E_0 = \tilde{\Omega}^t E_1 = \tilde{\Omega}^t E_2 = 0 \tag{73}$$

$$Im(\tilde{\Omega}) = \left(Ker(\tilde{\Omega}) \right)^{\perp} \tag{74}$$

- ainsi, $\left.\begin{array}{l} \bar{x} \in \mathrm{Im}(\hat{\Omega}) \\ \{e_i\}_{i=1}^{3} \in \ker(\hat{\Omega}) \end{array}\right\} \Rightarrow x \perp \epsilon_i \quad \forall i = 1,2,3$

- mais : $\mathrm{Im}(\hat{\Omega}) \oplus \ker(\hat{\Omega}) = \mathbb{R}^6$

$\dim(\mathrm{Im}(\hat{\Omega})) + \dim(\ker(\hat{\Omega})) = 6$

- or : $\dim(\ker(\hat{\Omega})) = 3$ car E_0, E_1, E_2 sont lin. indép. , $\ker(\hat{\Omega}) = \mathrm{vect}\{E_1, E_2, E_3\}$

$\Longrightarrow \dim(\mathrm{Im}(\hat{\Omega})) = 3$

$\Longrightarrow \exists$ une solution

- méthode :

$$\frac{\partial}{\partial t_1} N_i^{(0)} = \frac{\partial N_i^{(0)}}{\partial \rho} \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t_1}}_{(52)} + \frac{\partial N_i^{(0)}}{\partial \rho u_\alpha} \cdot \underbrace{\frac{\partial \rho u_\alpha}{\partial t_1}}_{(53)} \qquad (75)$$

<u>Solution de (60) et (61)</u> : $N_i^{(0)}$ t.q. $\Omega(N_i^{(0)}) = 0 \equiv$ sol. de l'éq. local.

- hyp. : $T_i(N^{(0)}) = T_{i+3}(N^{(0)})$ (à cause de l'éq. local ... à peine une hypothèse... !) (76)

$D_i(N^{(0)}) = D_{i+1}(N^{(0)}) = D_{i-1}(N^{(0)})$ (à cause éq. local ... idem) (77)

(76) $\Rightarrow$ avec $M_i = \dfrac{N_i^{(0)}}{(1-N_i^{(0)})}$

$$\ln(M_i) + \ln(M_{i+2}) + \ln(M_{i+4}) - \ln(M_{i+1}) - \ln(M_{i+3}) - \ln(M_{i+5}) = 0 \quad ⊛ \ \forall i = 1,\dots,6 \qquad (78)$$

(77) $\Longrightarrow$

$$\ln(M_i) + \ln(M_{i+3}) = \ln(M_{i+1}) + \ln(M_{i+4}) \qquad (79)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \ln(M_1) - \ln(M_2) + \ln(M_4) - \ln(M_5) = 0 & (80) \\ \ln(M_2) - \ln(M_3) + \ln(M_5) - \ln(M_6) = 0 & (81) \end{cases}$$

(80) + (81) $\Rightarrow$

$$\ln(M_1) - \ln(M_3) + \ln(M_4) - \ln(M_6) = 0 \quad ⊛ \qquad (82)$$

(80) − (82) $\Rightarrow$

$$\ln(M_1) - 2\ln(M_2) + \ln(M_3) + \ln(M_4) - 2\ln(M_5) + \ln(M_6) = 0 \quad ⊛ \qquad (83)$$

Soit

$$\mathbb{R}^6 = \mathrm{vect}\{\{E_i\}_{i=0}^{5}\} \qquad (84)$$

(voir p. 90 pour les définitions exactes des E_i et pourquoi). On peut écrire (78), (82), (83) alors selon :

$$\ln(M) \cdot E_3 = \ln(M) \cdot E_4 = \ln(M) \cdot E_5 = 0 \quad , M = (M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6) \qquad (85)$$

$\Longrightarrow \ln(M) \perp \mathrm{vect}\{E_3, E_4, E_5\} = \mathrm{Im}(\hat{\Omega})$

$\Longrightarrow \ln(M) \in \mathrm{vect}\{E_0, E_1, E_2\} = \ker(\hat{\Omega})$

$\Longrightarrow \ln(M) = a \cdot E_0 + b \cdot E_1 + c \cdot E_2$

$$\Longrightarrow \ln(M_i) = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \\ e_{31} \\ e_{41} \\ e_{51} \\ e_{61} \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \\ e_{32} \\ e_{42} \\ e_{52} \\ e_{62} \end{pmatrix} \qquad (85)$$

$\to \hat{e}_1$

$$\Longrightarrow \ln(M_i) = a + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \underbrace{\hat{e}_i}_{\in \mathbb{R}^2} \qquad (86)$$

avec $M_i = \dfrac{N_i^{(0)}}{1-N_i^{(0)}}$ on a :

$$\frac{N_i^{(0)}}{1-N_i^{(0)}} = \exp\left(a + b_1 e_{i1} + b_2 e_{i2}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad N_i^{(0)} = \frac{1}{1+\exp\left(-a-\bar{b}\cdot\hat{e}_i\right)} \tag{87}$$

↳ distribution de Fermi-Dirac ! C'est la conséquence du principe d'exclusion de l'automate cellulaire (pas plus de 1 particule par noeud).

Eqn. de Euler : – $a, \bar{b} = a, \bar{b}\,(\rho, \bar{u})$ définies par $\rho = \sum_{i=1}^{6} N_i^{(0)}$; $\rho.\bar{u} = \sum_{i=1}^{6} \bar{v}_i N_i^{(0)}$.

– soit $X_i = a + \bar{b}\hat{e}_i$, alors

$$\begin{cases} X = a(\rho,\bar{u})\cdot E_0 + b_1(\rho,\bar{u})\cdot E_1 + b_2(\rho,\bar{u})\cdot E_2 & (88)\\ N_i^{(0)} = f(X_i) = (1+e^{-X_i})^{-1} & (89)\end{cases}$$

– D.L. de $N_i^{(0)}$ autour de $\bar{u}=0$:

$$N_i^{(0)} = f(x_i(\bar{u}=0)) + \bar{u}\cdot\nabla_{\bar{u}} f(x_i)\Big|_{\bar{u}=0} + \frac{1}{2} u_\alpha u_\beta \frac{\partial^2}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} f(x_i)\Big|_{\bar{u}=0} + O(u^3) \tag{90}$$

– avec :

$$\frac{\partial}{\partial u_\alpha} = \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{91}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_\alpha \partial u_\beta}\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial u_\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \tag{92}$$

– de plus, lorsque $\bar{u}=0$ (pas de mvt. macroscopique), le fluide est symétrique $N_i^{(0)} = N_j^{(0)}$ $\forall i,j$, indép. de la direction i, donc (90) devient :
d'où $X_i(\bar{u}=0) = X_i(\rho, \bar{u}=0) = X(\rho)$

$$N_i^{(0)} = f(x) + \sum_{\alpha=1}^{2} u_\alpha \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}\Big|_{\bar{u}=0} f'(x) + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta=1}^{2} u_\alpha u_\beta \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} f'(x) + \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial u_\beta} f''(x)\right)_{\bar{u}=0} + \dots \tag{93}$$

– en utilisant $\rho = \sum_{i=1}^{6} E_{0i} N_i^{(0)}$ et d'autres relations on calcule...

$$\begin{cases} a_{11} f'(x) + \frac{1}{2} b_{11}^2 f''(x) = 0 \quad , \quad a_i = \left(\frac{\partial a}{\partial u_i}\right)_{\bar{u}=0} & (94)\\ a_{22} f''(x) + \frac{1}{2} b_{22}^2 f''(x) = 0 & (95)\\ f(x) = \frac{1}{6}\rho & (96)\\ b_{11} = b_{22} = \frac{\rho}{3v f'(x)} & (97)\\ a_{11} = a_{22} = -\frac{\rho^2}{18 v^2}\frac{f''(x)}{(f'(x))^3} & (98)\end{cases}$$

$\Longrightarrow$ dans (90) :

$$N_i^{(0)} = \frac{\rho}{6} + \frac{\rho}{3v}\bar{e}_i\cdot\bar{u} - \frac{\rho^2}{36}\frac{u^2}{v^2}\frac{f''(x)}{(f'(x))^2} + \frac{\rho^2}{18}\frac{f''(x)}{(f'(x))^2} e_{i\alpha} e_{i\beta}\frac{u_\alpha}{v}\frac{u_\beta}{v} \tag{99}$$

– comme $f(x) = (1+e^{-x})^{-1}$ est la distrib. de F.-Dirac, on a :

$$f' = f(1-f) \tag{100}$$
$$f'' = f(1-f)(1-2f) \tag{101}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{cases} N_i^{(0)} = \frac{\rho}{6} + \frac{\rho}{3v}\hat{e}_i\cdot\bar{u} - \frac{1}{2}\rho\cdot G(\rho)\frac{u^2}{v^2} + \rho\cdot G(\rho)\, e_{i\alpha} e_{i\beta}\frac{u_\alpha}{v}\frac{u_\beta}{v} & (102)\\ G(\rho) = \frac{2}{3}\frac{(3-\rho)}{(6-\rho)} \end{cases}}$$

↳ pour obtenir l'éq. de Euler, il faut calculer $\Pi_{\alpha\beta}^{(0)}$: $\frac{\partial}{\partial t_1}\rho u_\alpha + \sum_{\beta=1}^{2}\frac{\partial}{\partial r_{1\beta}}\Pi_{\alpha\beta}^{(0)} = 0$, $\Pi_{\alpha\beta}^{(0)} = \sum_{i=1}^{6} v_{i\alpha} v_{i\beta} N_i^{(0)}(r,t)$.
↳ calcul...

$$\begin{cases} \Pi_{\alpha\beta}^{(0)} = \left(\frac{v^2}{2}\rho - \frac{\rho}{2} g(\rho) u^2\right)\delta_{\alpha\beta} + \rho\, g(\rho)\, u_\alpha u_\beta & (103)\\ g(\rho) = \frac{3}{...}G(\rho) = \frac{\rho-3}{...} & (104)\end{cases}$$

– éq. Euler :

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\rho u_\alpha + \sum_{\beta=1}^{2}\frac{\partial}{\partial r_{1\beta}}\Pi^{(0)}_{\alpha\beta} = 0 \tag{105}$$

$$\Pi^{(0)}_{\alpha\beta} = \underbrace{\left(\overset{\text{gaz parfait}}{\frac{v^2}{2}\rho} - \frac{\rho}{2}g(\rho)u^2\right)}_{p\text{ : terme de pression (diagonal)}}\delta_{\alpha\beta} + \underbrace{\rho\cdot g(\rho)\,u_\alpha u_\beta}_{\text{terme convectif}} \tag{106}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial t_1}\rho u + \nabla_1 p + \left(\bar\nabla_1\, \rho\, g(\rho) \cdot \bar u\right)\bar u = 0 \tag{107}$$

– approximations macroscopiques : $|\bar u|$ petit $\Rightarrow \rho=\rho_0 \Rightarrow$

$$\cancel{\rho_0}\frac{\partial}{\partial t_1}\bar u + \cancel{\rho_0}\nabla\left(\frac{v^2}{2}-\frac{1}{2}g(\rho_0)u^2\right) + \cancel{\rho_0}\left(\bar u\cdot\nabla_1 g(\rho)\right)\bar u = 0 \tag{108}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\bar u + g(\rho_0)\,(\bar u\cdot\nabla_1)\bar u = -\frac{1}{\rho_0}\nabla_1 p} \tag{109}$$

$$\boxed{g(\rho_0) = \frac{\rho_0-3}{\rho_0-6} \neq 1} \tag{110}$$

– différence avec la forme bien connue de l'équation de Euler :

$g(\rho_0)\neq 1$: différence due à la non-invariance Galliléenne de l'automate cellulaire :

$$\frac{d\bar u}{dt} \neq \frac{\partial}{\partial t}u + g(\rho)(\bar u\cdot\nabla)\bar u$$

Vitesse du son : $c_s = \pm v/\sqrt{2}$

Viscosité du réseau : équation de Navier-Stokes déjà trouvée :

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho u_\alpha + \sum_{\beta=1}^{2}\frac{\partial}{\partial r_\beta}\left(\Pi^{(0)}_{\alpha\beta} + \varepsilon\overset{\text{nouveau}}{\Pi^{(1)}_{\alpha\beta}} + \frac{\tau}{2}\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial t_1}\Pi^{(0)}_{\alpha\beta} + \sum_{\gamma=1}^{2}\frac{\partial}{\partial r_\gamma}S^{(0)}_{\alpha\beta\gamma}\right)\right) = 0 \tag{111}$$

calcul : →

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho u_\alpha + \sum_{\beta=1}^{2}\frac{\partial}{\partial r_\beta}\Pi^{(0)}_{\alpha\beta} = \underbrace{-\sum_{\beta=1}^{2}\frac{\partial}{\partial r_\beta}\varepsilon\Pi^{(1)}_{\alpha\beta}}_{\text{① viscosité de collision}} - \underbrace{\frac{\tau v^2}{8}}_{=\nu_{\text{réseau}}}\nabla^2\rho u_\alpha \tag{112}$$

→ dû au modèle du réseau
pas de pb. car ① >> ce terme

↳ calcul ⇒

$$N_i^{(1)} = -\frac{2\tau}{3\rho(1-s)^3}\left(e_{i\alpha}e_{i\beta} - \tfrac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\right)\frac{\partial}{\partial r_{1\beta}}\rho u_\alpha \quad ; \quad s = \rho/6 \tag{113}$$

$\Longrightarrow \varepsilon\Pi^{(1)} = \ldots$

$\Longrightarrow$ (111) devient. – calculs..

– faibles nb. Mach ⇒ → seule différence : non-invariance Galliléenne...

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\bar u + g(\rho)(\bar u\cdot\nabla)\bar u = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\bar u} \quad \text{: Navier-Stokes !} \tag{114}$$

$$\boxed{\nu = \tau v^2\left(\frac{1}{2\rho(1-\rho/6)^3} - 1/8\right)} \quad \text{: viscosité dynamique } \nu\neq 0 \tag{115}$$

Libre parcours-moyen :

$$\lambda_{mfp} = \overset{\text{maille}}{\lambda}\sum_{k\geq 0} k\,p_k \tag{116}$$

$$p_k = (1-p_c)^{k-1}p_c \quad , \; p_c = \text{prob. avoir une coll.} \tag{117}$$

(116) et (117) ⇒

$$\lambda_{mfp} = \lambda\sum_{k\geq 0} k\,(1-p_c)^{k-1}p_c$$

$$= \lambda\cdot p_c\cdot\frac{\partial}{\partial p_c}\underbrace{\sum_{k\geq 0}-(1-p_c)^k}_{=\frac{-1}{1-(1-p_c)} = -\frac{1}{p_c}} = \lambda\cdot\frac{p_c}{p_c^2} = \frac{\lambda}{p_c} \tag{118}$$

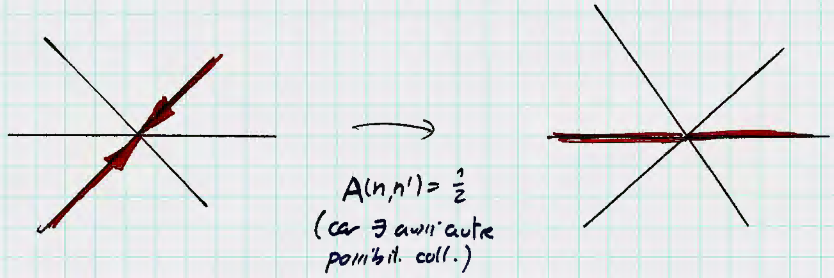
– or p_c peut se calculer de la microdynamique : $p_c = \frac{\rho}{6}\left(1-\frac{\rho}{6}\right)^3 \Longrightarrow$

$$V_c = \frac{v}{12}\lambda_{mfp} \qquad (119)$$

$\Longrightarrow$ petite viscosité $\Longleftrightarrow$ libre parcours moyen petit ! Plus il y a de collisions, moins le fluide est visqueux... Oui ! c'est évident : bcp. collisions $\Rightarrow$ chgt. rapide de la substance au niveau macro. et donc moins visqueux !

Matrice de collision et balance semi-détaillée : – formulation ⊕ générale : n'impose pas le type de collision (2 particules, 3 particules...)

– idée : $A(n,n') \equiv$ matrice de collision (proba $n \to n'$)



– modèle FHP : collision entre nb. de particules qque : $2^6 = 64$ possibilités de collisions $\Longrightarrow$

$$A(n,n') \in M_{64}(\mathbb{R})$$

– mais : $A(n,n') = 0$ souvent : $\mathrm{card}(n) \neq \mathrm{card}(n')$, ou n et n' n'ont pas la même impulsion, etc.

$$\sum_{n'} A(n,n') = 1 \qquad (120)$$

– si $A(n,n') = A(n',n)$: "balance détaillée".
– cond. moins forte "balance semi-détaillée" :

$$\sum_{n} A(n,n') = 1 \quad \forall n' \qquad (121)$$

Eqn. Boltzmann sur réseau : soit $N_i = p(n_i = 1)$, alors :

$$P(n) = \prod_j N_j^{\,n_j}(1-N_j)^{1-n_j} \qquad (122)$$

– en effet, si $n = n_i$, alors on a : $P(n_i) = N_i^{\,n_i}(1-N_i)^{1-n_i}$, et avec $n_i = 1$, on a : $P(n_i = 1) = N_i^{\,1}(1-N_i)^0 = N_i$.
– ainsi :

$$\langle n' \rangle = \langle A(n,n') \rangle_n = \int dn\, P(n)\, A(n,n') = \sum_n P(n)\, A(n,n') \qquad (123)$$

et la probabilité d'avoir l'état n'.

$$\langle n_i' \rangle = N_i' = \sum_{n,n'} n_i'\, P(n)\, A(n,n') \qquad \left(= \int n'\, P(n')\, dn' \right) \qquad (124)$$

– comme

$$N_i = \sum_n n_i\, P(n) \qquad (125)$$

$$\sum_{n'} A(n,n') = 1 \qquad (126)$$

alors (125) et (126) dans (124) $\Rightarrow$

$$N_i' - N_i = \sum_{nn'} n_i'\, P(n)\, A(n,n') - \sum_n n_i\, P(n) \sum_{n'} A(n,n')$$

$$= \sum_{nn'} (n_i' - n_i)\, P(n)\, A(n,n')$$

$$\overset{(122)}{=} \sum_{n,n'} (n_i' - n_i)\, A(n,n') \prod_j N_j^{\,n_j}(1-N_j)^{1-n_j} \qquad (127)$$

et comme $N_i' = N_i(\bar{r} + \lambda e_i, t+\tau)$, on a finalement l'éqn. de Boltzmann sur réseau :

$$N_i(\bar{r} + \lambda e_i, t+\tau) - N_i(r,t) = \sum_{n,n'} (n_i' - n_i)\, A(n,n') \prod_j N_j^{\,n_j}(1-N_j)^{1-n_j} \qquad (128)$$

Modèle FHP-III

Introduction : – haut nb. Reynolds
- nouveau nb. Reynolds qui absorbe $g(\rho)$ du modèle sur réseau
- ⟹ possible d'utiliser le modèle sur réseau pour simuler des écoulements, grâce à la similitude des écoulements et des nb. de Reynolds.

↳ pb. : Re du FHP n'est tjs que trop faible … $Re^{max} \simeq 0.387$
↳ changer les règles de collision : permet d'augmenter Re : particules au repos, nulles collisions, moins visqueux…
↳ $Re^{max} = 2.22$

Modèles 3D : réseau 4D projeté sur 3D permet d'obtenir la symétrie et l'isotropie désirées…

Réseau thermique : FHD : 1 vitesse ⟹ non thermal
⟹ introduire plusieurs vitesses.

- modèles à plusieurs vitesses : – particules rapides : 2 sites en τ
  - particules normales : 1 site en τ
  - particules lentes : 0 site en τ (immobile)
  - réseau carré ⟹ pb. isotropie ⟹ bon pour fluide au repos, pas en mvt.

- éqn. thermo-hydrodynamiques : Navier-Stokes + densité d'énergie locale. Démarche : idem ; différences : contraintes sur l'énergie :

$$\rho\tilde{e} = \sum_i m \frac{v_i^2}{2} N_i \tag{129}$$

$$\rho e = \sum_i m \frac{(v_i-u)^2}{2} N_i = \rho\tilde{e} - \rho\frac{\bar{u}^2}{2} \quad \text{: énergie interne} \tag{130}$$

$$e = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot kT = kT \quad ; \; T : \text{temp. locale} \tag{131}$$

- modèle FHP thermique : – maille hexagonale + multispeed ≡ compliqué…

Les invariants d'échelle (conséquence du réseau ⟹ pas d'équivalent physique)

Modèles de réseaux de Boltzmann :

Introduction : – technique de simulation numérique
- en général : exigeant CPU
- ⟹ simplifications : 1) Boltzmann approx : $\langle n_i n_j\rangle = \langle n_i\rangle\langle n_j\rangle$: ∄ corrél.
  2) linéarisation terme collision autour de sa val. éq. ((Chap.-Enskog dev.)
  3) forcer une forme du terme de collision :

Lattice BGK equation (LBGK)
{Bhatnager, Gross, Krook}

$$f_i(\bar{r}+\lambda\hat{e}_i, t+\tau) - f_i(\bar{r},t) = \frac{1}{\xi}\left(f_i^{(0)}(\bar{r},t) - f_i(\bar{r},t)\right) \tag{132}$$

$f_i^{(0)}$: solution de l'équilibre local, choisie t.q. il y a la conservation de la masse et qté mvt., symétries, inv. Galliléе, etc…

- en effet, la justification de (132) est la suivante : c'est une équation de la forme, en fixant l'espace par exemple et en alignant l'indice n au temps : (132) ⟹

$$f_i(r+\lambda\hat{e}_i, t+\tau) = \frac{1}{\xi} f_i^{(0)}(\bar{r},t) + \left(1-\frac{1}{\xi}\right) f_i(r,t)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow x_{n+1} &= \alpha\bar{x} + (1-\alpha)x_n \\
&= \alpha\bar{x} + (1-\alpha)(\alpha\bar{x} + (1-\alpha)x_{n-1}) \\
&= \alpha\bar{x} + (1-\alpha)\alpha\bar{x} + (1-\alpha)^2 x_{n-1} \\
&= \bar{x}\alpha(1+(1-\alpha)) + (1-\alpha)^2(\alpha\bar{x} + (1-\alpha)x_{n-2}) \\
&= \bar{x}\alpha(1+(1-\alpha)) + (1-\alpha)^2\alpha\bar{x} + (1-\alpha)^3 x_{n-2} \\
&= \bar{x}\alpha(1+(1-\alpha)+(1-\alpha)^2) + (1-\alpha)^3 x_{n-2} \\
&= \alpha\bar{x}\sum_{k=0}^{2}(1-\alpha)^k + (1-\alpha)^3 x_{n-2} \\
&= \alpha\bar{x}\sum_{k=0}^{p}(1-\alpha)^k + (1-\alpha)^{p+1} x_{n-p} \qquad , \; p=n \\
&= \alpha\bar{x}\underbrace{\sum_{k=0}^{n}(1-\alpha)^k}_{= \frac{1-(1-\alpha)^{n+1}}{1-(1-\alpha)} = \frac{1}{\alpha}(1-(1-\alpha)^{n+1})} + (1-\alpha)^{n+1}x_0 \\
&= \cancel{\alpha}\bar{x}\,\frac{1}{\cancel{\alpha}}(1-(1-\alpha)^{n+1}) + (1-\alpha)^{n+1}x_0
\end{aligned}$$

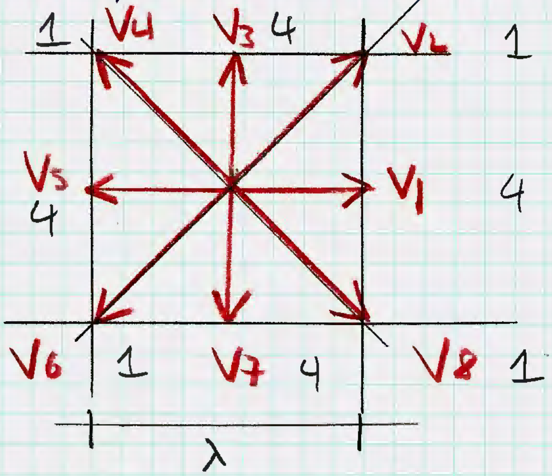
$$\Rightarrow x_n = \bar{x}\left(1-(1-\alpha)^n\right) + (1-\alpha)^n x_0 \qquad (133)$$

– or $\alpha \in [0,1]$, et $\alpha = 1$ ne nous intéresse pas car on est alors déjà à l'équilibre, donc :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}\cdot\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(1-(1-\alpha)^n\right)}_{\to 0} + \underbrace{\lim_{n\to\infty}(1-\alpha)^n x_0}_{=0}$$
$$= \bar{x} \qquad (134)$$

→ donc on tend vers l'équilibre local avec cette formulation BGK.

<u>Fluide de Boltzmann sur réseau 2D</u> : – réseau K-ré pour l'ordi', mais pour la physique réseau hexagonal : pas un problème car on peut passer de l'un à l'autre.



i impair :

$$\|V_{i+1}\| = \sqrt{2}\,.\|V_i\| = \sqrt{2}\,\frac{\lambda}{\tau} \qquad (135)$$

temps : τ

– conservation de l'énergie $\sim \|V_i\|^2 \Rightarrow$

$$\|V_2\|^2 = \left(\sqrt{2}\,\|V_1\|\right)^2 = 2\,\|V_1\|$$

$$E_2 = m_2\,\|V_2\|^2\,\frac{2}{2} = 2m_2\,\|V_1\|^2$$
$$E_1 = m_1\,\|V_1\|^2\,\frac{1}{2}$$

– or lors d'une collision il y conserv. de l'énergie :

$$m_2\,\|V_2\|^2 = \frac{1}{2}\,m_1\,\|V_1\|^2$$
$$\Rightarrow m_2\cdot 2\cdot\cancel{\|V_1\|^2} = \frac{1}{2}\,m_1\,\cancel{\|V_1\|^2}$$
$$\Rightarrow m_1 = 4\cdot m_2$$

$\Rightarrow$ poids différent : $m_1 = 4$, $m_2 = 1$ (136)

– grandeurs macroscopiques :

$$\rho = \sum_{i=1}^{8} m_i f_i \quad ; \quad \rho.\bar{u} = \sum_{i=1}^{8} m_i f_i \bar{v}_i \qquad (137)$$

– isotropie :

$$\sum_{i=1}^{8} m_i V_{i\alpha} V_{i\beta} = 12\cdot v^2\cdot\delta_{\alpha\beta} \qquad (138)$$

$$\sum_{i=1}^{8} m_i V_{i\alpha} V_{i\beta} V_{i\gamma} V_{i\delta} = \nu\left(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}\right) \qquad (139)$$

– calcul de ν : cf. p. 127

– équilibre local :

$$f_i(\bar{r}+\tau\bar{v}_i, t+\tau) - f_i(\bar{r},t) = \Omega_i = \frac{1}{\xi}\left(f_i^{(0)}(\bar{r},t) - f_i(\bar{r},t)\right) \qquad (140)$$

$$f_i = f_i^{(0)} + \xi f_i^{(1)} + \dots \qquad (141)$$

– choix de f_i : expression, par exemple, obtenue dans le modèle FHP :

$$f_i^{(0)} = a\rho + \frac{b}{v^2}\,\rho.\bar{v}_i.\bar{u} + \rho.e\,\frac{u^2}{v^2} + \rho.\frac{h}{v^4}\,V_{i\alpha}V_{i\beta}U_\alpha U_\beta \qquad (142)$$

coefficients à déterminer.

- contraintes :

$$\sum_{i=1}^{8} m_i \Omega_i = 0 \qquad \text{(masse)} \tag{143}$$

$$\sum_{i=1}^{8} m_i \bar{v}_i \Omega_i = 0 \qquad \text{(impulsion)} \tag{144}$$

- or :

$$\Omega_i = \frac{1}{\xi}\left(f_i^{(0)}(\bar{r},t) - f_i(\bar{r},t) \right) \tag{145}$$

$$\rho = \sum_{i=1}^{8} m_i f_i \tag{146}$$

$$\rho \bar{u} = \sum_{i=1}^{8} m_i f_i v_i \tag{147}$$

- donc (143) $\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{8} m_i \Omega_i = \sum_{i=1}^{8} \frac{m_i}{\xi} f_i^{(0)}(\bar{r},t) - \underbrace{\sum_{i=1}^{8} \frac{m_i}{\xi} f_i(r,t)}_{= \frac{1}{\xi}\rho} = 0$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{8} m_i f_i^{(0)}(r,t) = \rho \tag{148}$$

- et (144) $\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{8} m_i \bar{v}_i \Omega_i = \frac{1}{\xi}\sum_{i=1}^{8} m_i \bar{v}_i f_i^{(0)}(\bar{r},t) - \frac{1}{\xi}\underbrace{\sum_{i=1}^{8} m_i \bar{v}_i f_i(\bar{r},t)}_{=\rho\bar{u}} = 0$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{8} m_i \bar{v}_i f_i^{(0)}(\bar{r},t) = \rho \bar{u} \tag{149}$$

- autres contraintes : invariance galliléenne de Ω_i. On fait les calculs issus de (148) et (149) de sorte que :

$$\begin{cases} a = \frac{1}{20} \\ 12h + 20e = 0 \\ b = \frac{1}{12} \end{cases} \tag{150}$$

+ invariance de Gallilée $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \Pi_{\alpha\beta}^{(0)} = p\,\delta_{\alpha\beta} + \underbrace{\rho u_\alpha u_\beta}_{=o(u^2)} & (151) \\ p = \frac{3}{5} v^2 \left(1 - \frac{2}{3}\underbrace{\frac{u^2}{v^2}}_{\text{du au modèle sur réseau : artificiel}} \right)\rho & (152) \end{cases}$$

- Equation de Navier-Stokes : refait des calculs similaires à ceux déjà réalisés avec la forme connue cette-fois de Ω_i : calcul de $\Pi^{(1)}$, $f_i^{(1)}$, $S_{\alpha\beta\gamma}^{(0)}$... similaire.... cf. p. 131 et suivantes $\Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho u_\alpha + \rho u_\beta \partial_\beta u_\alpha + u_\alpha \operatorname{div}\rho\bar{u} = -\partial_\alpha p + \tau v^2\left(\frac{\xi}{3} - \frac{1}{6}\right)\nabla^2 \rho u_\alpha + \tau v^2 \left(\xi\left(\frac{2}{3} - 12a\right) - \left(\frac{1}{3} - 6a\right)\right) \partial_\alpha \operatorname{div}(\rho\bar{u}) \tag{153}$$

- fluide incompressible : $\operatorname{div}\rho\bar{u} = 0 \Longrightarrow$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\bar{u} + (\bar{u}\cdot\nabla)\bar{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu_{es}\nabla^2 u \\ \nu_{es} = \frac{\tau v^2}{3}\left(\xi - \frac{1}{2}\right) \end{cases} \tag{154}$$

ξ : paramètre libre pour ajuster la viscosité, $\xi \geq 1/2$ pour avoir $\nu_{es} > 0$

Avant-propos : but : présenter la théorie des échelles de temps pour application dans différents domaines

Introduction : – rôle fondamental en théorie cinétique
– théorie de perturbations capable de représenter la dynamique à la limite $\varepsilon \to 0$ pour des temps longs
→ développement de la distribution à une particule en puissances de ε sous la forme d'une série uniformément convergente au cours du temps
– échelles considérées :

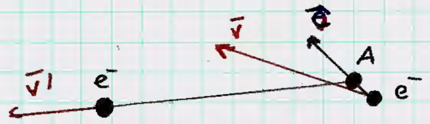
$$t \sim \varepsilon^{-n} \quad , n = 1, 2, \dots \tag{1}$$

Chap. 2 : Mouvement des e^- dans les métaux : modèle de Lorentz

$$n_e \ll n_A \tag{2}$$
$$m_e \ll m_A \tag{3}$$

↳ néglige collisions e^-e^- ⇒ pb. = diffusion $1e^-$ dans milieu diffuseur
– collision e^- ⇒

$$\underline{v}' = \underline{v} - 2(\underline{v}\cdot\hat{e})\hat{e} \qquad \Rightarrow |\underline{v}'| = |\underline{v}| \tag{4}$$



– A toujours immobile
– équation de Boltzmann :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{a}\frac{\partial}{\partial \underline{v}}\right) f(\underline{v},t) = -\frac{v}{\lambda}\hat{Q}\, f(v,t) \tag{5}$$

a : accél. cte due à la présence du champ électrique
$v = |\underline{v}|$

$$\lambda = \frac{1}{\pi n_A (r_A + r_e)^2} \quad \text{: libre parcours moyen} \tag{6}$$

$$\hat{Q}\, f(v,t) = f(v,t) - f_{sph}(v,t) \tag{7}$$

$$f_{sph}(v,t) = \hat{P}\, f(v,t) = \frac{1}{4\pi}\int d\hat{v}\; f(v,t) \quad \text{: composante isotrope} \tag{8}$$

$$\Rightarrow \hat{Q} = (\mathbb{1} - \hat{P}) \tag{9}$$

$$\hat{P}^2 = \hat{P} \quad ; \quad \hat{Q}^2 = (\mathbb{1}-\hat{P})(\mathbb{1}-\hat{P}) = \mathbb{1} - \hat{P} - \hat{P} + \hat{P}^2 = 1 - \hat{P} = Q$$
$$\hat{P}Q = \hat{P} - \hat{P}^2 = 0 \, ; \quad QP = \hat{P} - \hat{P}^2 = 0 \, ; \quad \hat{Q}\hat{P} = \hat{P}Q = 0$$

– sol. de (5) : ∄ sol. stationnaire ; pour des temps longs :

$$f^{As}(v,t) = \frac{1}{4\pi\lambda a^2 t}\left(1 + \frac{\underline{a}\cdot\underline{v}}{a^2 t}\right) e^{-v^3/(3\lambda a^2 t)} \tag{10}$$

– énergie des électrons :

$$E = \int_{\mathbb{R}^3} d^3v\; \tfrac{1}{2} m_e v^2 f^{As}(v,t) \qquad ; \qquad \underline{v} = \underline{u}\,(3\lambda a^2 t)^{1/3}$$

$$J = \det\begin{pmatrix} (3\lambda a^2 t)^{1/3} & & \\ & (3\lambda a^2 t)^{1/3} & \\ & & (3\lambda a^2 t)^{1/3} \end{pmatrix} = (3\lambda a^2 t)^{1}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} d^3u\; \tfrac{1}{2} m_e v^2 (3\lambda a^2 t)^{1} f^{As}(u,t)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} d^3u\; \tfrac{1}{2} m_e u^2 (3\lambda a^2 t)^{1 + \cancel{1}\frac{1}{3}\cdot 2} \frac{1}{4\pi\lambda a^2 t}\left(1 + \frac{\underline{a}\cdot\underline{u}}{a^2 t}(3\lambda a^2 t)^{1/3}\right) e^{-u^3}$$

$$= \tfrac{1}{2} m_e \frac{(3\lambda a^2 t)^{5/3}}{4\pi\lambda a^2 t}\left(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3u\; u^2 e^{-u^3}}_{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} dr\; J\cdot r^2 e^{-r^3}} + \int_{\mathbb{R}^3} d^3u\; u^2 \frac{\underline{a}\cdot\underline{u}}{a^2 t}(3\lambda a^2 t)^{1/3} e^{-u^3}\right)$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} dr\; r^4 \sin^2\theta\; e^{-r^3}$$

⋮

$$\sim t^{2/3} \tag{11}$$

Condition initiale : – supposons que la condition initiale est l'équilibre thermique (ok si champ faible : ∃ régime quasi-stat.)

$$f^M(v) = \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2k_B T}\right) \tag{12}$$

– hypothèse : champ faible ⟹ énergie $m_e a \lambda$ absorbée par un électron sur son libre parcours moyen est petite comparée à son énergie thermique initiale $k_B T$

m_e : masse
a : accélération : m/s^2
λ : distance : m
} unités masse × $\frac{m^2}{s^2}$ = énergie

⟹ petit paramètre :

$$\varepsilon = \frac{m_e a \lambda}{k_B T} \ll 1 \tag{13}$$

– question : évolution de la distribution (12) sous l'action du champ
– introduction du petit paramètre dans les variables sans dimensions :

$$\underline{u} = \sqrt{\frac{m_e}{k_B T}}\ \underline{v} \tag{14}$$

$$\tau = \sqrt{\frac{k_B T}{m_e}}\ \frac{t}{\lambda} \tag{15}$$

– définition de la nouvelle distribution $F(\underline{u}, \tau)$ ainsi obtenue :

$$f(\underline{v}, t)\, d\underline{v} = F(\underline{u}, \tau)\, d\underline{u} \tag{16}$$

– pour $t = \tau = 0$, on a :

$$f^M(\underline{v})\, d\underline{v} = F(\underline{u}, \tau = 0)\, d\underline{u}$$

$$\Longrightarrow F(\underline{u}, \tau = 0) = F^M(u) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\, e^{-u^2/2} \tag{17}$$

– et l'équation de Boltzmann (5) devient :

$$\left(\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{k_B T}{m_e}}\frac{\partial}{\partial \tau} + a \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{u}}\sqrt{\frac{m_e}{k_B T}}\right) f(v;t) = -\sqrt{\frac{k_B T}{m_e}}\frac{1}{\lambda}\,\underline{u}\ \hat{Q} f(v;t)$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + a\frac{\partial}{\partial \underline{u}}\underbrace{\sqrt{\frac{m_e}{k_B T}}\cdot\lambda\sqrt{\frac{m_e}{k_B T}}}_{=\frac{m_e \lambda}{k_B T}}\right)\underbrace{f(v;t)}_{\substack{= f(v(u), t(\tau)) \\ = F(u,\tau)}} = -\cancel{\sqrt{\frac{k_B T}{m_e}}}\cdot\cancel{\frac{1}{\lambda}}\cdot\lambda\cdot\cancel{\sqrt{\frac{m_e}{k_B T}}}\cdot\underline{u}\cdot\hat{Q} f(v;t)$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{m_e \lambda}{k_B T}\left(a_1\frac{\partial}{\partial u_1} + a_2\frac{\partial}{\partial u_2} + a_3\frac{\partial}{\partial u_3}\right)\right) F(u,\tau) = -\underline{u}\ \hat{Q} F(u;\tau)$$

– choix du repère : rotation telle que z // champ extérieur $\underline{a}$ (espace isotrope, la forme des éqn. ne change pas) : $\underline{a} = |a|\hat{e}_3$

$$\Longrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \underbrace{\frac{m_e \lambda a}{k_B T}}_{=\varepsilon}\frac{\partial}{\partial u_z}\right) F(u,\tau) = -\underline{u}\ \hat{Q} F(u;\tau)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial u_z}\right) F(u,\tau) = -\underline{u}\ \hat{Q} F(u;\tau)} \tag{18}$$

– échelles de temps :

$$\varepsilon = \left(\frac{t_h}{t_{acc}}\right)^2 \ll 1, \quad t_h = \lambda\sqrt{\frac{m_e}{k_B \cdot T}}$$: temps moyen entre collisions à l'éq. th.

$$t_{acc} = \sqrt{\frac{\lambda}{a}}$$: temps nécessaire pour qu'un e⁻ de vitesse initiale nulle parcoure la distance λ

$$\Longrightarrow \underbrace{t_h}_{\text{mvt. thermique}} \gg \underbrace{t_{acc}}_{\text{mvt. sous influence du champ.}}$$

<u>Méthode des échelles multiples de temps</u> : – problème : solution de (18) pour $\varepsilon \to 0$: méthode de perturbation classique $\Rightarrow$ divergences "séculaires". Notre méthode :

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial u_z}\right) F(\underline{u}, \tau) = u\, \hat{Q}\, F(\underline{u}, \tau) \tag{19}$$

$$\Big\downarrow \text{ nvlle eq.}$$

$$\boxed{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{\partial}{\partial \tau_k} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial u_z}\right) F^{\varepsilon}(\underline{u}; \{\tau_i\}_{i=0}^{\infty}) = -u\, \hat{Q}\, F(\underline{u}; \{\tau_i\}_{i=0}^{\infty})} \tag{20}$$

avec F^{ε} qui dépend des variables de temps indépendantes $\{\tau_i\}_{i=0}^{\infty}$. Ceci revient donc à dire que le temps τ est une somme de processus se déroulant à différentes échelles de temps, i.e. à découper l'axe du temps : $\boxed{\tau = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^{-k} \tau_k} = \tau_0 + \frac{1}{\varepsilon}\tau_1 + \dots$; si bien sûr tous les τ_k soient du même ordre en ε. De cette ; $\tau_j \sim \varepsilon^j \tau \Rightarrow j \uparrow$ alors l'échelle $\downarrow$

somme on voit que τ_0 est un temps microscopique (plutôt : son échelle de temps est microscopique), l'échelle de τ_1 est plus grande car $1/\varepsilon \gg 1$, et ainsi de suite.

Si $\tau \sim \varepsilon^{-j}$, alors on a un processus à l'échelle τ_j car $\varepsilon^k . \tau \sim \varepsilon^{k-j}$ et

$k-j > 0 \Rightarrow k > j \Rightarrow$ infini : $k > j \Rightarrow$ échelle de temps ⊕ grde que $j \Rightarrow$ processus déjà accompli

$k-j < 0 \Rightarrow k < j \Rightarrow$ zéro : $k < j \Rightarrow$ échelle de temps ⊕ ptite que $j \Rightarrow$ processus pas encore comm.

On introduit aussi la série de perturbations pour F :

$$\boxed{F^{\varepsilon}(u; \{\tau_i\}_{i=0}^{\infty}) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k F^{(k)}(u, \{\tau_i\}_{i=0}^{\infty})} \tag{21}$$

qui signifie qu'à l'échelle de temps τ_i correspond la physique donnée par $F^{(i)}(\dots)$. Avec de bonnes conditions aux bords on peut (?) éliminer les divergences de la série (21), pour toute échelle de temps.

– (21) dans (20) $\Rightarrow$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{\partial}{\partial \tau_k} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial u_z}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k F^{(k)}(\underline{u}, \{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}) = -u\, \hat{Q} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k F^{(k)}(\underline{u}, \{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}) \tag{22}$$

– aux différents ordres :

$$O(\varepsilon^0) : \left(\frac{\partial}{\partial \tau_0} + \underline{u}\, \hat{Q}\right) F^{(0)}(\underline{u}, \{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}) = 0 \tag{23}$$

$$O(\varepsilon^1) : \left(\frac{\partial}{\partial \tau_1} + \frac{\partial}{\partial u_z}\right) F^{(0)}(\underline{u}, \{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}) + \left(\frac{\partial}{\partial \tau_0} + \underline{u}\, \hat{Q}\right) F^{(1)}(\underline{u}, \{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}) \tag{24}$$

$$O(\varepsilon^2) : \frac{\partial}{\partial \tau_2} F^{(0)}(\underline{u}, \{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}) + \left(\frac{\partial}{\partial \tau_1} + \frac{\partial}{\partial u_z}\right) F^{(1)}(\underline{u}, \{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}) + \left(\frac{\partial}{\partial \tau_0} + \underline{u}\, \hat{Q}\right) F^{(2)}(\underline{u}, \{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}) = 0 \tag{25}$$

$\vdots$

– pour un ordre quelconque :

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{k+j} \frac{\partial}{\partial \tau_k} F^{(j)}}_{\substack{k+p=j\ ,\ j=0,1,2,\dots \\ p=|j-k| \Rightarrow k=0,1,\dots,j}} + \frac{\partial}{\partial u_z} \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j+1} F^{(j)}}_{\substack{u=j+1 \\ j=u-1}} + u\hat{Q} \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j F^{(j)} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{j} \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \frac{\partial}{\partial \tau_k} F^{(j-k)} + \frac{\partial}{\partial u_z} \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j F^{(j-1)} + \sum_{j=0}^{\infty} u\hat{Q}\, \varepsilon^j F^{(j)} = 0$$

– donc pour $j \geq 1$ on a :

$$O(\varepsilon^j) : \sum_{k=0}^{j} \frac{\partial}{\partial \tau_k} F^{(j-k)} + \frac{\partial}{\partial u_z} F^{(j-1)} + u\hat{Q}\, F^{(j)} = 0 \tag{25}$$

Résumé de la méthode:

Équation différentielle

↓ ↓

TEMPS: découpage de l'axe du temps aux différentes échelles de temps:

$$\tau = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^{-k} \tau_k$$

$(\tau_j \sim \varepsilon^j \tau)$

PHYSIQUE: découplage de la physique aux différentes échelles de temps décrites par τ_k

$$F^{\varepsilon}(\dots,\{\tau_i\}) = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k F^{(k)}(\dots,\{\tau_i\})$$

↓

Égalité des ordres de grandeur ε^{-k}: équations différentielles aux échelles multiples de temps

Suite de l'exemple:

• $O(\varepsilon^0)$: $\left\{\frac{\partial}{\partial \tau_0} + u\hat{Q}\right\} F^{(0)} = 0$. En appliquant les proj. $\hat{P}$ et $\hat{Q}$ on trouve 2 éqn. simplifiées:

$$\frac{\partial}{\partial \tau_0} \hat{P} F^{(0)} = 0 \tag{26}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau_0} + u\right) \hat{Q} F^{(0)} = 0 \tag{27}$$

or comme $\hat{P}$ est un proj. sph., ne chge pas la dép. en τ_0, donc: $F^{(0)} \neq F^{0}(\tau_0)$: à cet ordre la sol. ne dépend pas du temps le plus macroscopique. (27) $\Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_0} \hat{Q} F^{(0)} = -u \hat{Q} F^{(0)}$$

$$\Longrightarrow \quad \hat{Q} F^{(0)}(\underline{u}; \tau_1, \tau_2, \dots) = e^{-u\tau_0} \hat{Q} F^{(0)}(\underline{u}; \tau_1, \tau_2, \dots) \tag{28}$$

avec la condition initiale qui a la symétrie sphérique

$$F(\underline{u}, \tau = 0) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-u^2/2} \tag{29}$$

et le fait que $\hat{Q}$ est l'opérateur qui mesure la déviation à la symétrie sphérique, on est conduit à

$$\hat{Q} F^{(0)}(\underline{u}; \tau_1 = 0, \tau_2 = 0, \dots) = 0 \tag{30}$$

On peut montrer que la sol. $\hat{Q} F^{(0)} \equiv 0$ est l'unique:

$$\hat{Q} F^{(0)} \equiv 0 \tag{31}$$

• $O(\varepsilon^1)$:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial \tau_0} + u\hat{Q}\right\} F^{(1)} + \left\{\frac{\partial}{\partial \tau_1} + \frac{\partial}{\partial u_z}\right\} F^{(0)} = 0$$

$$\hat{P} \cdot \Big| \Rightarrow \left\{\frac{\partial}{\partial \tau_0} \hat{P} + u \underbrace{\hat{P}\hat{Q}}_{=0}\right\} F^{(1)} + \left\{\hat{P}\frac{\partial}{\partial \tau_1}\hat{P} + \hat{P}\frac{\partial}{\partial u_z}\right\} F^{(0)} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \tau_0} \hat{P} F^{(1)} + \frac{\partial}{\partial \tau_1} \underbrace{\hat{P} F^{(0)}}_{= F^{(0)}} + \underbrace{\hat{P} \underbrace{\frac{\partial}{\partial u_z} F^{(0)}}_{= -u_z F^{(0)}}}_{= 0} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \tau_0} \hat{P} F^{(1)} + \frac{\partial}{\partial \tau_1} F^{(0)} = 0 \tag{32}$$

- de plus, comme $F^{(0)} \neq F^{(0)}(\tau_0)$, alors :

$$\frac{\partial}{\partial\tau_0}\hat{P}F^{(1)} = \mathrm{cte}\big|_{\tau_0} \tag{33}$$

$$\Rightarrow \hat{P}F^{(1)} \text{ est linéaire en } \tau_0 \tag{34}$$

- or on désire éliminer les divergences en τ_0 lorsque $\tau_0 \to +\infty$, donc il faut que $\mathrm{cte}|_{\tau_0} < \infty$, i.e. il faut que $\mathrm{cte}|_{\tau_0} = 0$ carrément, et:

$$\frac{\partial}{\partial\tau_0}\hat{P}F^{(1)} = 0 \tag{35}$$

(car sinon $\mathrm{cte} \neq 0$ et $\hat{P}F^{(1)} \to \infty$ si $\tau_0 \to \infty$), et aussi donc:

$$\frac{\partial}{\partial\tau_1}F^{(0)} = 0 = \frac{\partial}{\partial\tau_1}PF^{(0)} \tag{36}$$

- ainsi:

$$F^{(0)} = F^{(0)}(u;\tau_2,\dots) \tag{37}$$

$$\hat{P}F^{(1)} = PF^{(1)}(\underline{u};\tau_1,\tau_2,\dots) \tag{38}$$

- $\hat{Q}$ appliqué sur (24) $\Rightarrow$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\tau_0}+u\right\}\hat{Q}F^{(1)} + \hat{Q}\underbrace{\frac{\partial}{\partial\tau_1}F^{(0)}}_{=0} + \hat{Q}\frac{\partial}{\partial u_z}F^{(0)} = 0$$

$$\Rightarrow \left\{\frac{\partial}{\partial\tau_0}+u\right\}\hat{Q}F^{(1)} = -\hat{Q}\underbrace{\frac{\partial u}{\partial u_z}}_{=\frac{\partial}{\partial u_z}\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2} = \frac{u_z}{u}}\frac{\partial}{\partial u}F^{(0)}$$

$$\Rightarrow \left\{\frac{\partial}{\partial\tau_0}+u\right\}\hat{Q}F^{(1)} = -\hat{Q}\frac{u_z}{u}\frac{\partial}{\partial u}F^{(0)} \tag{39}$$

- avec $\hat{Q}\,{}^{u_z}/_{u}\,{}^{\partial}/_{\partial u}F^{(0)} = \mathrm{cte}|_{\tau_0}$, donc on choisit $\hat{Q}F^{(1)}(u;0,\tau_1,\tau_2,\dots) = 0$, de sorte que :

$$\frac{\partial}{\partial\tau_0}(\hat{Q}F^{(1)}) = -u(\hat{Q}F^{(1)}) - \underbrace{\hat{Q}\frac{u_z}{u}\frac{\partial}{\partial u}F^{(0)}}_{=\mathrm{cte}|_{\tau_0}}$$

$$\Rightarrow f' = -uf - a$$

$$\Rightarrow f = e^{-\tau_0 u}\Big(\overset{=0}{\cancel{f_0}} + (-a)\underbrace{\int_0^{\tau_0}dx\,e^{ux}}_{=\frac{1}{u}e^{\tau_0 u}-\frac{1}{u}}\Big)$$

$$= e^{-\tau_0 u}\left(\frac{a}{u}-\frac{a}{u}e^{\tau_0 u}\right)$$

$$= \frac{a}{u}\left(e^{-\tau_0 u}-1\right)$$

$$\Rightarrow \hat{Q}F^{(1)}(\underline{u};\tau_0,\tau_1,\tau_2,\dots) = \underbrace{\frac{u_z}{u^2}\frac{\partial}{\partial u}\hat{Q}F^{(0)}(u;\tau_2,\dots)}_{=\mathrm{cte}|_{\tau_1}}\cdot\left(e^{-u\tau_0}-1\right) \tag{40}$$

$$\Rightarrow \hat{Q}F^{(1)} = \hat{Q}F^{(1)}(\underline{u};\tau_0,\tau_2,\dots) \tag{41}$$

↳ les déviations par rapport à la symétrie sphérique à l'échelle de temps "1" ne dépend pas du temps à cette échelle... !

- $O(\varepsilon^2)$: projection de (25) avec $\hat{P}$; divergence sur τ_0 à éliminer, et le reste est similaire...

<u>Evolution du courant:</u> trouvé $O(\varepsilon^2)$:

$$\langle u_z\rangle = \frac{4\pi}{3}\varepsilon\int_0^\infty du\,u^2\left(e^{-u\tau}-1\right)\frac{\partial}{\partial u}F^{(0)}(u;\varepsilon^2\tau) \tag{42}$$

↳ développement du flux d'électrons sur les échelles de temps consécutives
- première échelle de temps: le champ commence à agir sur les électrons :

$$\tau \sim \varepsilon^0 = 1 \quad (\tau_0) \tag{43}$$

↳ calculs :

$$\langle u_z\rangle = \underbrace{a\cdot t}_{\text{ordre le plus bas : } \nexists \text{ collisions}} - \frac{4}{3\lambda}\left(\frac{2k_BT}{\pi m_e}\right)^{1/2}at^2 + \dots$$

Chapitre 3 : Dynamique d'une particule test à la limite du champ moyen

Concept d'une particule test : temps initial : v_1 connue. Temps plus longs : M.-B. d'observer $\underline{v}_1$

$$\underset{t=0}{\delta(v_1 - v)} \longrightarrow \underset{t>0}{\phi^M(\underline{v}_1)} = \left(\frac{m\beta}{2\pi}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m\beta v_1^2}{2}\right) \tag{44}$$

physique complexe

↳ méthode des échelles multiples permet de trouver cette loi d'évolution si l'interaction entre particules est à la limite du champ moyen.

Condition initiale : distribution initiale (proba.)

$$\rho(1,2,\dots,N;\overset{\text{temps}}{0}) = \delta(v_1 - v)\,\rho^{eq}(1,2,\dots,N)\cdot\frac{1}{\phi^M(v_1)} \quad ; \; j = (\underline{r}_j, \underline{v}_j),\, j=1,\dots,N \tag{45}$$

- pourquoi ? Parce qu'au moment de l'insertion de la particule test, les autres particules sont à l'équilibre, d'où $\rho^{eq}(1,2,\dots,N)$, et la distribution de la particule insérée est en $t=0$ un dirac, et tend vers $\phi^M(v_1)$.
- à la limite thermodynamique

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ \frac{N}{V}=n=cte}} \longrightarrow \rho(1,\dots N;0) \rightarrow f_s(1,2,\dots s;0) \tag{46}$$

↳ on passe à la distribution de particules dans la limite thermo, passage (3.2) ; pas compris... (pas important car ne revient pas par la suite).

- force entre particules :

$$U(r) \quad , \quad r = |\underline{r}| \tag{47}$$

- force exercée par la particule j sur la particule i :

$$\underline{F}(r_{ij}) = -\nabla_{\underline{r}_i} U(r_{ij}) \qquad , \; r_{ij} = |\underline{r}_i - \underline{r}_j| \tag{48}$$

- équation d'évolution BBGKY pour la distribution en limite thermodynamique :

$$\boxed{\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s}\left(\underline{v}_i\cdot\nabla_{\underline{r}_i} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s}\underline{F}(r_{ij})\cdot\nabla_{\underline{v}_i}\right)\right\} f_s(1,\dots,s;t) = -\int_{\mathbb{R}^n} dx_{s+1}\left(\sum_{i=1}^{s}\underline{F}(r_{i,s+1})\cdot\nabla_{\underline{v}_i}\right) f_s(1,\dots,s+1;t) \quad ; \; x = (\underline{r}, \underline{v})} \tag{49}$$

Th. microscopique du champ moyen : - potentiel remplacé par :

$$U_\varepsilon(r) = \varepsilon\, U(\varepsilon^{1/d} r) \tag{50}$$

↳ le potentiel U_ε a une portée plus grande, et une amplitude ε (portée $\varepsilon^{-1/d}$ + grde). Si $\varepsilon \to 0$, alors $U_\varepsilon \to 0$ et de grde portée $\Longrightarrow$ les particules ne ressentent essentiellement plus que le champ moyen du fluide ambiant.

- chgt. de variables :

$$\underline{x} = \varepsilon^{1/d}\,\underline{r} \tag{51}$$

$$\tau = \varepsilon^{1/d}\, t \tag{52}$$

→ 2 premières éqn. BBGKY ...

Echelles de temps : - ne tient compte que de 2 échelles de temps

$$\tau = \sum_{k=0}^{1} \varepsilon^k \tau_k \tag{53}$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \tau \sim \varepsilon^0 \quad ; \; \tau = \varepsilon^0 \tau_0 \\ \tau \sim \varepsilon^1 \quad ; \; \tau = \varepsilon^1 \tau_1 \end{array}\right\} \quad \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial \tau_1} \tag{54}$$

Calcul des perturbations : - discrétisation de la physique :

$$f_s^\varepsilon = f_s^{(0)} + \varepsilon f_s^{(1)} + O(\varepsilon^2) \quad , \; s \geq 1 \tag{55}$$

théorie de perturbations autour du champ moyen

$$f_s^{(0)}(1,2,\dots,s;\tau_0,\tau_1) = \prod_{j=1}^{s} f_1^{(0)}(j;\tau_0,\tau_1) \quad : \text{champ moyen} \tag{56}$$

- invariance par translation $\Rightarrow$ $f_1^{(0)}(j\,;\tau_0,\tau_1) = f_1^{(0)}(\underline{v}_j\,;\tau_0,\tau_1)$ indép. de $\underline{r}_j$.
- insertion des développements dans les équations de la hiérarchie $\rightarrow$ calcul... $\Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_0} f_1^{(0)}(\underline{v}_1\,;\tau_0,\tau_1) = 0 \qquad (57)$$

+ calculs...
↳ en général, ces calculs sont vraiment du bidouillage : où on peut on résout, dans l'ordre qui convient, etc... pas de vrai systématique
↳ devient compliqué... ...

Chapitre 4 : Mouvement brownien

Mélange brownien de sphères dures : - petit paramètre :

$$\varepsilon = \sqrt{m/M} \qquad (58)$$

, M : masse particule test.
m : masse particules fluide ambiant.
Σ : diamètre de la p. test. M.
σ : diamètre des p. du fluide m.

- but : éqn. donnant l'évolution de

$$f_1(B,t) \quad , B = (\underline{R},\underline{V}) \qquad (59)$$

: proba. trouver en t la particule test en B

- état de mélange particule + fluide est décrit par toutes les distributions :

$$\left\{ f_{1s}(B,1,2,\dots,s;t) \right\}_{s\geq 0} \quad ; \ j = (\underline{r}_j,\underline{v}_j) \qquad (60)$$

- et pour $s=0$ on note $f_1(B,t)$, et on définit :

$$f_{1s}(B,1,2,\dots,s;t) = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \frac{N}{V}=n}} \frac{N!}{(N-s)!} \int d(s+1)\dots\int dN \ \underbrace{\rho_{N+1}(B,1,\dots,s,s+1,\dots,N\,;t)}_{\text{densité de proba. du syst. entier (test particle + other ones)}} \qquad (61)$$

- variables sans dimensions :

$$\underline{V} = \sqrt{\frac{1}{\beta M}}\,\underline{U} \ ; \quad v_j = \sqrt{\frac{1}{\beta m}}\,u_j \ ; \underline{R} = \sigma\underline{X} \ ; \underline{r}_j = \sigma\underline{x}_j \ ; t = \sigma\sqrt{\beta m}\,\tau \qquad (62)$$

$\longrightarrow$ introduction des distributions

$$F_1(B;\tau) \quad ; \ F_{1s}(B,1,\dots,s;\tau) \qquad (63)$$

$\longrightarrow$ équations de la hiérarchie BBGKY : 1ère, 2ème

Analyse en échelles de temps : - changement de variables bien connu :

temps : $$\tau = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{-k}\tau_k \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial\tau} = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \frac{\partial}{\partial \tau_k} \qquad (64)$$

physique : $$\rho^{\varepsilon}_{N+1} = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \rho^{(k)}_{N+1} \longrightarrow F_1^{\varepsilon} = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k F_1^{(k)} \ ; \ F_{1s}^{\varepsilon} = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k F_{1s}^{(k)} \qquad (65)$$

$$\overline{T}_-^{\varepsilon}(B,j) = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k\,\overline{T}_-^{(k)}(B,j) \qquad (66)$$

- $O(\varepsilon^0)$: égale les termes d'ordre ε^0 $\rightarrow$ calculs ...
- $O(\varepsilon^1)$; $O(\varepsilon^2)$: calculs lourds ... compliqué ; bidouillages !

Questions : + erreurs trouvées dans le livre

- p. 74 : Une quantité sera conservée si $\|e^{i\omega\tau}\| = 1$ ...

  — pourquoi ? Et d'ailleurs, c'est toujours le cas : $\|e^{ix}\| = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$ ...
  → ce serait pas plutôt $e^{i\omega\tau} = 1$ (pas de module) ?
  ↳ dans ce cas, pourquoi ceci implique qu'une grandeur sera conservée ?

- p. 83 : "Similarly, a macroscopic space variable $\vec{r}_1$ ..." $\vec{r}_1 = \vec{r} \cdot \varepsilon \implies \vec{r}_1 << \vec{r}$
  $\implies$ r_1 n'est pas macroscopique, mais encore plus microscopique que $\vec{r}$!!!
  ↳ non : c'est la même chose que pour $\tau = \sum \varepsilon^k \tau_k$.

  · et on utilise en m. temps T_1 et T_2 qui sont macroscopiques...

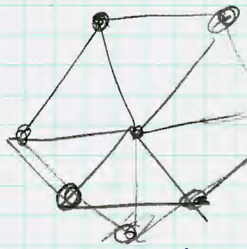
- p. 84 : développement multi-échelle : passage technique

$$\sum_{i=1}^{6} \left(\tau \frac{\partial}{\partial t_1} N_i^{(0)} + \lambda \sum_{\beta=1}^{2} c_{i\beta} \frac{\partial}{\partial r_{1\beta}} N_i^{(0)} \right) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \rho + \mathrm{div}(\rho \bar{u}) = 0$$

Passage : $\tau = \alpha \varepsilon / T_1$; $\lambda = O(\varepsilon) / L_1$, à l'ordre $O(\varepsilon)$



modèle FHP :

1) • ~p. 94 : réseau hexagonal choisi pour des raisons d'isotropie, vers la fin des calculs... (isotropie d'un tenseur du 4^e ordre...)
... ça me paraît un peu abstrait !... faire tous les calculs, en arriver à ce point, et constater alors que c'est le réseau hexagonal le seul qui puisse nous permettre de conclure...
... et la physique dans tout ça ?

hexagonal = meilleure approximation que le carré ⌑ pour le mvt. particules ?
axes arbitraire → dans ce cas une maille avec 8, 10, 12, .. noeuds doit aussi marcher ?

2) • p. 124 : modèle BGK :

terme de collision ; i = direction d'approche sur la maille

$$f_i(\bar{r} + \lambda \bar{e}_i, t + \tau) - f_i(\bar{r}, t) = \frac{1}{\xi} \left(f_i^{(0)}(r,t) - f_i(\bar{r}, t) \right)$$

choix de $f_i^{(0)}(r,t)$: solution de l'équilibre local, que l'on choisit pour qu'elle ait aussi les bonnes propriétés : conservation de la masse, de la qtté de mvt...
↳ mais : ça me semble loin d'être évident de faire un bon choix de $f_i^{(0)}$: cette fonction détermine l'équilibre

$$\lim_{n \to \infty} x_n = f^{(0)}$$ x_n : n : temps ; espace fixé

→ donc détermine la physique : l'état d'équilibre !
→ on ne peut pas vraiment "choisir" $f^{(0)}$ ... } ξ
→ comment faire alors pour trouver $f^{(0)}$ correcte ?

calculs

3) • p. 130 : pour satisfaire l'invariance Galliléenne le terme devant $\rho u_\alpha u_\beta$ doit être 1 :

$$\Pi^{(0)}_{\alpha\beta} = 12 v^2 \left(a + \left(e + \frac{h}{3} \right) \frac{u^2}{v^2} \right) \rho \, \delta_{\alpha\beta} + 8h \, \rho u_\alpha u_\beta$$

tens. moments

; $u = |u|$: vitesse de l'écoulement. $v = \frac{\lambda}{\tau}$: $v = |v_i|$: vitesse sur le réseau

inv. gallilée = inv. sous transl. + rot. $\Longrightarrow$ pourquoi donc $8h = 1$ alors ? ... ?

- p. 134 : simulations numériques réalisées pour le choix $\xi = 1$:

modèle BGK : $f_i(\bar{r} + \lambda \bar{e}_i, t + \tau) = \frac{1}{\xi} f_i^{(0)}(\bar{r}, t) + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) f_i(\bar{r}, t)$ (1)

"solution" réseau 2D : Navier-Stokes :
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \bar{u} + (\bar{u} \nabla) u = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu_{es} \nabla^2 u \\ \nu_{es} = \frac{\tau v^2}{3} \left(\xi - \frac{1}{2} \right) \end{cases}$$ (2)

or si $\xi = 1/2$, alors, (1) dit que ~~notre problème est statique~~ bon ! , tandis que le modèle est bien défini avec (2) ...
ξ ?

$a_0^{(5)}$ et $b_0^{(5)}$: explications du début

... du problème

A12

Calcul b_0

Mettre l'intro p 0 pour corriger !

Au vu de (5.136) et (5.153), on a dans tous les cas une équation du type

$$\mathcal{L}[C(W)\,W^2] = W^2$$

à résoudre. Dans ces cas, on a vu que $C(W) \propto S_{5/2}^{(0)}(W^2)$, où on notera le coefficient de proportionnalité C_0. Considérons le développement

$$C(W) = \sum_{p\geq 0} C_p\, S_{5/2}^{(p)}(W^2) \tag{1}$$

$$\mathcal{C} = C(W)\,W^2 = \sum_{p\geq 0} C_p\, \mathcal{C}^{(p)} \quad , \quad \mathcal{C}^{(p)} = S_{5/2}^{(p)}(W^2)\,W^2 \tag{2}$$

Notre but est de calculer $a_0^{(5)}(m,\ell) = b_0^{(5)}(m,\ell) \overset{= C_0.}{}$ Les calculs qui suivent sont fortement inspirés du \cite{Chapman}, donc nous allons dans cette annexe adopter en grande partie les notations de ce livre. Soit

$$n I(F) \doteq \int d^3c\, db\, d\varepsilon \;\; g \;\; b \;\; f_1^{(0)} f^{(0)} \left(F_1 + F - F_1' - F' \right) \;, \tag{2c}$$

avec n la densité, $g = |c_1 - c_2|$ la norme des vitesses relatives, b le paramètre d'impact, $\varepsilon \in [0, 2\pi]$ l'angle polaire, $f^{(0)}$ la distribution d'équilibre, c la vitesse. Dans ces notations, l'équation à résoudre est

$$n I[\mathcal{C}] = f^{(0)} S_{5/2}^{(0)}(W^2)\,W^2$$

On multiplie cette dernière relation par $\mathcal{C}^{(q)} = S_{5/2}^{(q)}(W^2)\,W^2$ puis intègre sur d^3c pour obtenir

$$\int d^3c\; I[\mathcal{C}]\; \mathcal{C}^{(q)} = \underbrace{\frac{1}{n}\int d^3c\; f^{(0)}\; S_{5/2}^{(0)}(W^2)\,W^2\; S_{5/2}^{(q)}(W^2)\,W^2}_{:= \beta_q} \tag{*}$$

Introduisons la notation

$$[F, G] = \int d^3c \;\; I[F]\, G \;, \tag{2b}$$

alors (*) devient

$$[\mathcal{C}, \mathcal{C}^{(q)}] = \beta_q \,. \tag{3}$$

Or par (2)

$$[\mathcal{C}, \mathcal{C}^{(q)}] = \sum_{p\geq 0} C_p \underbrace{[\mathcal{C}^{(p)}, \mathcal{C}^{(q)}]}_{:= b_{pq}} \overset{(3)}{=} \beta_q$$

$$\Longrightarrow \boxed{\sum_{p\geq 0} C_p\, b_{pq} = \beta_q} \tag{4}$$

2) coefficient β_q

A12 coeff. β_q

Dans cette dernière expression, aussi bien les coefficients C_p que b_{pq} sont difficiles à calculer. Seul β_q est immédiat à trouver. En effet avec $f^{(0)} d^3c = \frac{n}{\pi^{3/2}} e^{-W^2} d^3W$

$$\begin{aligned}
\beta_q &= \frac{1}{n}\int d^3c\; f^{(0)}\; W^2 S_{5/2}^{(0)}(W^2)\cdot W^2 S_{5/2}^{(q)}(W^2) \\
&= \frac{1}{n}\int d^3W\; \frac{n}{\pi^{3/2}}\, e^{-W^2}\, W^4\, S_{5/2}^{(q)}(W^2)\; S_{5/2}^{(0)}(W^2) \\
&= \frac{4\pi}{\pi^{3/2}} \int_0^\infty dW\, e^{-W^2}\, W^4\, S_{5/2}^{(q)}(W^2)\, S_{5/2}^{(0)}(W^2)\; W^2 \qquad , \; x = W^2,\; dx = 2W\,dW \\
&= \frac{4\pi}{\pi^{3/2}} \int_0^\infty dx\, \frac{1}{2x^{1/2}}\, e^{-x}\, x^3\; S_{5/2}^{(q)}(x)\, S_{5/2}^{(0)}(x) \\
&= \frac{4\pi}{2\pi^{3/2}} \underbrace{\int_0^\infty dx\, e^{-x}\, x^{5/2}\, S_{5/2}^{(q)}(x)\, S_{5/2}^{(0)}(x)}_{= \langle S_{5/2}^{(q)} | S_{5/2}^{(0)} \rangle_{L^2([0,\infty[,\, e^{-x} x^{5/2} dx)} \, = \, \frac{\Gamma(5/2+0+1)}{0!}\delta_{q,1} \, = \, \Gamma\left(\frac{1}{2}+3\right)\delta_{q,1} \, = \, \frac{\sqrt{\pi}}{2^3}\, 1.3.5\, \delta_{q,1} \, = \, \frac{\sqrt{\pi}\, 3.5}{2^3}\, \delta_{q,1}} \\
&= \frac{4\pi}{2\pi^{3/2}}\, \sqrt{\pi}\, \frac{3.5}{2^3}\, \delta_{q,1} \\
&= \frac{15}{4}\, \delta_{q,1} \,.
\end{aligned}$$

Insérant la valeur de β_q dans (4)

$$\sum C_p\, b_{p0} = \beta_0 \,,$$

de plus nous savons que $C_p = C_p S_{p,0}$, d'où

$$C_0 b_{00} = \beta_0$$

$$\Longrightarrow \boxed{C_0 = \frac{\beta_0}{b_{00}}}$$

3) Coefficient b_{00} (A13)

Pour obtenir le coefficient C_0 qui nous intéresse, il est encore nécessaire de calculer b_{00}. En général, nous avons vu que

$$\begin{aligned} b_{pq} &= [C^{(p)}, C^{(q)}] \\ &= [S_{5/2}^{(p)}(W^2)\, W^2, S_{5/2}^{(q)}(W^2)\, W^2]_1 \end{aligned}$$

tapé jusqu'ici

Pour calculer ce coefficient b_{00}, nous allons d'abord étudier le problème plus général à deux espèces

$$b_{pq} = [S_{5/2}^{(p)}(W_1^2)\, W_1^2, S_{5/2}^{(q)}(W_2^2)\, W_2^2]_{12},$$

puis poser l'égalité des espèces lorsque cela s'avèrera nécessaire. En utilisant la notation (2b) ainsi que ~~(2c)~~ $I_{ij}(F) = \frac{1}{n_i n_j}\int d^3c_j\, d\varepsilon\, db\; g\, b\, f_i^{(0)} f_j^{(0)} (F - F')$, $i,j \in \{1,2\}$ (voir \cite{Chapman} p. 83) on a

$$[S_{5/2}^{(p)}(W_1^2)\, W_1^2, S_{5/2}^{(q)}(W_2^2)\, W_2^2]_{12} = \frac{1}{n_1 n_2}\int d^3c_1\, d^3c_2\, d\varepsilon\, db\;\; g\, b\, f_1^{(0)} f_2^{(0)} \left(S_{5/2}^{(p)}(W_1^2)\, W_1^2 - S_{5/2}^{(q)}(W_1'^2)\, W_1'^2 \right) S_{5/2}^{(q)}(W_2^2) \cdot W_2^2 \quad (4\text{bis})$$

Avant de continuer, il est nécessaire d'introduire la définition formelle du polynôme de Sonine. Soit $s \in]0,1[$, $\mathcal{S} = s/(1-s)$, alors $S_m^{(n)}(x)$ est défini par le développement

$$\left(\frac{\mathcal{S}}{s}\right)^{m+1} e^{-x\mathcal{S}} = \frac{1}{(1-s)^{m+1}}\, e^{-x\frac{s}{1-s}} \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} s^n\, S_m^{(n)}(x). \quad (5)$$

On peut montrer qu'en réalisant un développement de Taylor de $(1-s)^{-m-1} e^{-x\frac{s}{1-s}}$ que l'on égale au membre de droite de (5), on obtient l'expression (3.17) du polynôme de Sonine. Comparant (5) avec (4bis), on en conclut que (4bis) est égal au coefficient de $s^p t^q$ du développement en puissances de s et t de

$$\left(\frac{\mathcal{S}T}{st}\right)^{7/2} \frac{1}{n_1 n_2}\int d^3c_1\, d^3c_2\, d\varepsilon\, db\;\; g\, b\, f_1^{(0)} f_2^{(0)} \left(e^{-\mathcal{S}W_1^2} W_1^2 - e^{-\mathcal{S}W_1'^2} W_1'^2\right) W_2^2\, e^{-TW_2^2}, \quad (6)$$

avec $T = \frac{t}{1-t}$, $t \in]0,1[$. En effet, on le vérifie facilement en insérant (5) dans (6) que l'on compare à (4bis).

En y substituant les valeurs $f_1^{(0)} d^3c_1 = {}^{n_1}/\pi^{3/2}\, e^{-W_1^2}\, d^3W_1$ et $f_2^{(0)} d^3c_2 = {}^{n_2}/\pi^{3/2}\, e^{-W_2^2}\, d^3W_2$ avec $W_1^2 + W_2^2 = W_0^2 + g^2$ (voir \cite{Chapman} p. 149, 150), l'expression (6) est égale à

$$\left(\frac{\mathcal{S}T}{st}\right)^{7/2} \frac{1}{\pi^3}\int d^3g\, d\varepsilon\, db\;\; g\, b\, \left(L_{12}(0) - L_{12}(\chi)\right) \quad (7)$$

$$L_{12}(\chi) = \int d^3W_0\; e^{-W_0^2 - g^2 - \mathcal{S}W_1'^2 - TW_2^2}\; W_1'^2\, W_2^2. \quad (8)$$

Ainsi, le coefficient b_{pq} est égal au coefficient de $\mathcal{S}^p t^q$ du développement en puissances de s et t de (7). La différence avec le calcul canonique, est qu'ici on a $W_1'^2 W_2^2$ dans $L_{12}(\chi)$, au lieu de $W_1' W_1' : W_2 W_2$. Le calcul à réaliser est le suivant. Il faut arriver à simplifier au maximum $L_{12}(\chi)$ grâce à des changements de variables judicieux, pour ensuite l'introduire dans (7). Comme on s'intéresse en particulier au coefficient b_{00} et non pas le cas général b_{pq}, il va être possible de réaliser un développement de Taylor de (7) en puissances de s et t pour mettre en évidence le coefficient de $\mathcal{S}^0 t^0$. Finalement, l'expression obtenue devra être exprimée en termes d'une fonction $\Omega_1^{(\ell)}(r)$ contenant les calculs non triviaux d'intégration de la section efficace, mais qui dans le cas du gaz de Maxwell est connue et dont les valeurs sont données dans \cite{Chapman}.

3) 1) Simplification de $L_{12}(\chi)$ (sections suivantes : 3) 2) : Développement de Taylor de $L_{12}(\chi)$ 3) 3) : La fonction $\Omega_1^{(\ell)}(r)$ 3) 4) Expression de b_{00} 4) : Coefficient C_0)

Soient les changements de variables (p. 150, 151 Chapman)

$$\begin{aligned} W_1 &= \sqrt{M_1}\, W_0 - \sqrt{M_2}\, g \\ W_2 &= \sqrt{M_2}\, W_0 + \sqrt{M_1}\, g \\ W_1' &= \sqrt{M_1}\, W_0 - \sqrt{M_2}\, g', \end{aligned}$$

avec $|g| = |g'|$ et $M_i = \frac{m_i}{m}$, $m = \sum_{i=1}^{2} m_i$, donc dans notre cas $M_1 = M_2 = 1/2$. Nous gardons pour le moment les variables M_1 et M_2 sans les égaler. Ainsi

$$\begin{aligned} W_1^2 + W_2^2 &= W_0^2 + g^2 \\ g \cdot g' &= g^2 \cos\chi, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} W_0^2 + g^2 + \mathcal{S}\, W_1'^2 + T\, W_2^2 &= i_{12}\, W_0^2 + i_{21}\, g^2 + 2\sqrt{M_1 M_2}\, W_0 \left(Tg - \mathcal{S}g'\right), \\ i_{12} &= 1 + M_1\mathcal{S} + M_2 T, \\ i_{21} &= 1 + M_2\mathcal{S} + M_1 T. \end{aligned}$$

Introduisons les changements de variables

$$V = W_0 + \frac{1}{i_{12}}\sqrt{M_1M_2}\,(Tg - \delta g'), \qquad d^3V = d^3W_0$$

$$\Longrightarrow W_0^2 + g^2 + \delta W_1^2 + T W_2^2 = i_{12}V^2 + j_{12}g^2,$$

avec

$$j_{12} = i_{21} - \frac{M_1M_2}{i_{12}}\left(\delta^2 + T^2 - 2\delta T\cos\chi\right).$$

Grâce à ces changements de variables, l'expression (8) devient

$$L_{12}(\chi) = \int d^3V\, e^{-i_{12}V^2 - j_{12}g^2}\, W_1'^2\, W_2^2. \qquad (9)$$

Exprimons $W_1' = W_1'(V)$ et $W_2 = W_2(V)$. Soient les changements de variable

$$V_1 = \frac{M_1}{i_{12}}(Tg - \delta g') + g' \qquad\qquad W_1' = \sqrt{M_1}\,V - \sqrt{M_1}\,V_1$$

$$V_2 = \frac{M_2}{i_{12}}(Tg - \delta g') - g, \qquad\qquad W_2 = \sqrt{M_2}\,V - \sqrt{M_1}\,V_2$$

de sorte que

$$W_1'^2W_2^2 = M_1M_2V^4 + V^2\left(M_1^2V_2^2 + M_2^2V_1^2\right) + 4M_1M_2\,(V\cdot V_1)(V\cdot V_2) + M_1M_2V_1^2V_2^2 + O(V^k, k\,\text{impair}),$$

ce qui donne en l'insérant dans (9)

$$\begin{aligned}
L_{12}(\chi) &= \int d^3V\, e^{-i_{12}V^2 - j_{12}g^2} M_1M_2V^4 + \int d^3V\, e^{-i_{12}V^2 - j_{12}g^2} V^2\left(M_1^2V_2^2 + M_2^2V_1^2\right) \\
&\quad + \int d^3V\, e^{-i_{12}V^2 - j_{12}g^2}\, 4M_1M_2\,(V\cdot V_1)(V\cdot V_2) + \int d^3V\, e^{-i_{12}V^2 - j_{12}g^2} M_1M_2V_1^2V_2^2 \\
&= M_1M_2\, e^{-j_{12}g^2}\, 4\pi \underbrace{\int_0^\infty dV\, e^{-i_{12}V^2} V^6}_{=\frac{1}{2} i_{12}^{-7/2}\frac{3\cdot 5}{2^3}\sqrt{\pi}} + 4\pi\left(M_1^2V_2^2 + M_2^2V_1^2\right) e^{-j_{12}g^2} \underbrace{\int_0^\infty dV\, e^{-i_{12}V^2} V^4}_{=\frac{1}{2} i_{12}^{-5/2}\frac{3}{2^2}\sqrt{\pi}} \\
&\quad + 4M_1M_2\, e^{-j_{12}g^2} \underbrace{\int d^3V\, e^{-i_{12}V^2} \sum_{i,j=1}^{3} V_i V_{1i} V_j V_{2j}}_{=\sum_{i,j=1}^{3} V_{1i}V_{2j}\int d^3V\, e^{-i_{12}V^2} V_iV_j\,\delta_{ij}} + M_1M_2V_1^2V_2^2\, e^{-j_{12}g^2}\, 4\pi \underbrace{\int_0^\infty dV\, e^{-i_{12}V^2} V^2}_{=\frac{1}{2} i_{12}^{-3/2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} \\
&= e^{-j_{12}g^2}\, 4\pi \left(M_1M_2 \frac{3\cdot 5}{2^4} i_{12}^{-7/2}\sqrt{\pi} + \left(M_1^2V_2^2 + M_2^2V_1^2\right)\frac{3}{2^3} i_{12}^{-5/2}\sqrt{\pi} + M_1M_2V_1^2V_2^2\frac{1}{2^2} i_{12}^{-3/2}\sqrt{\pi}\right) \\
&\quad + 4M_1M_2\, e^{-j_{12}g^2} \underbrace{\sum_{i=1}^{3} V_{1i}V_{2i}\int d^3V\, e^{-i_{12}V^2} V_i^2}_{= V_1\cdot V_2 \cdot \left(\underbrace{\int_{\mathbb{R}} dV_1\, e^{-i_{12}V_1^2} V_1^2}_{= i_{12}^{-3/2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} dV\, e^{-i_{12}V^2}\right)^2}_{=\pi/i_{12}}\right) = (V_1\cdot V_2)\frac{\pi^{3/2}}{2} i_{12}^{-5/2}} \\
&= e^{-j_{12}g^2}\, 4\pi^{3/2}\left(M_1M_2\frac{3\cdot 5}{2^4} i_{12}^{-7/2} + \left(M_1^2V_2^2 + M_2^2V_1^2\right)\frac{3}{2^3} i_{12}^{-5/2} + M_1M_2V_1^2V_2^2\frac{1}{2^2} i_{12}^{-3/2} \right. \\
&\qquad\qquad \left. + M_1M_2\frac{1}{2}(V_1\cdot V_2)\, i_{12}^{-5/2}\right) \\
&= e^{-j_{12}g^2}\pi^{3/2} M_1M_2\, i_{12}^{-7/2}\left(\frac{3\cdot 5}{2^2} + \frac{M_1^2V_2^2 + M_2^2V_1^2}{M_1M_2}\frac{3}{2} i_{12} + V_1^2V_2^2\, i_{12}^2 + 2\,(V_1\cdot V_2)\, i_{12}\right) \\
&= e^{-j_{12}g^2}\pi^{3/2} M_1M_2\, i_{12}^{-7/2}\left(\frac{15}{4} + i_{12}\left(2(V_1\cdot V_2) + \frac{3}{2}\frac{M_1^2V_2^2 + M_2^2V_1^2}{M_1M_2}\right) + i_{12}^2 V_1^2V_2^2\right).
\end{aligned}$$

Il reste à calculer $V_1\cdot V_2$, $V_1^2V_2^2$ et V_1^2, V_2^2. Des définitions utilisées on a (\cite{Chapman} p. 152, 153)

$$V_1\cdot V_2 = \frac{g^2}{i_{12}}\left(1 - j_{12} - \cos\chi\right) \qquad (10)$$

$$V_1^2V_2^2 = (V_1\cdot V_2) + \frac{g^4}{i_{12}^2}\sin^2\chi \overset{(10)}{=} \frac{g^4}{i_{12}^2}\left(\left(1 - j_{12} - \cos\chi\right)^2 + \sin^2\chi\right), \qquad (11)$$

d'où

$$L_{12}(x) = \pi^{3/2} M_1 M_2\, e^{-j_{12} g^2}\, i_{12}^{-7/2}\left(\frac{15}{4} + 2g^2(1-j_{12}-\cos x) + i_{12}\,\frac{3}{2}\,\frac{M_1^2V_2^2+M_2^2V_1^2}{M_1M_2} + g^4\left((1-j_{12}-\cos x)^2+\sin x^2\right)\right).$$

Il reste à calculer V_1^2 et V_2^2. Pour ce faire, on est obligé de poser le cas particulier $M_1=M_2=1/2$, qui dans notre modèle est le cas qui nous intéresse car on a des particules identiques. Ainsi:

$$\frac{M_1^2 V_2^2+M_2^2V_1^2}{M_1M_2} = V_1^2+V_2^2,$$

et avec les définitions de V_1 et V_2 en posant $a = \frac{1}{2i_{12}}(Tg - \mathcal{S}g')$ on a $V_1 = a+g'$, $V_2 = a-g$, d'où:

$$\begin{aligned}
V_1^2+V_2^2 &= a^2+g'^2+2ag' + a^2+g^2-2ag\\
&= 2a^2 + g'^2+g^2 + 2a(g'-g) \qquad , \; g'^2 = g^2\\
&= 2\cdot\frac{1}{4i_{12}^2}(Tg-\mathcal{S}g')^2 + 2g^2 + 2\,\frac{1}{2i_{12}}(Tg-\mathcal{S}g')(g'-g)\\
&= \frac{1}{2i_{12}^2}\left(T^2g^2 + \mathcal{S}^2g'^2 - 2T\mathcal{S}gg'\right) + 2g^2 + \frac{1}{i_{12}}\left(Tgg' - Tg^2 - \mathcal{S}g'^2 + \mathcal{S}gg'\right) \quad , \; gg' = g^2\cos x\\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{i_{12}^2}\left(g^2(T^2+\mathcal{S}^2) - 2\mathcal{S}Tg^2\cos x\right) + 2g^2 + \frac{1}{i_{12}}\left((T+\mathcal{S})g^2\cos x - (T+\mathcal{S})g^2\right),
\end{aligned}$$

d'où ~~(notant à présent $L_1(x)$ au lieu de $L_{12}(x)$ car on a posé $M_1=M_2=1/2$ précédemment)~~

$$\begin{aligned}
L_{12}(x) = \pi^{3/2} M_1M_2\, e^{-j_{12}g^2}\, i_{12}^{-7/2}\Big(&\frac{15}{4} + 2g^2(1-j_{12}-\cos x) + g^4\left((1-j_{12}-\cos x)^2+\sin^2 x\right)\\
&+ \cancel{i_{12}}\,\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\,i_{12}^{-2}\left(g^2(T^2+\mathcal{S}^2) - 2\mathcal{S}Tg^2\cos x\right) + i_{12}\,\frac{3}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}g^2\\
&+ i_{12}\,\frac{3}{2}\,i_{12}^{-1}\left((T+\mathcal{S})g^2\cos x - (T+\mathcal{S})g^2\right)\Big)\\
= \pi^{3/2} M_1M_2\, e^{-j_{12}g^2}\, i_{12}^{-7/2}\Big(&\frac{15}{4} + 2g^2(1-j_{12}-\cos x) + g^4\left((1-j_{12}-\cos x)^2+\sin^2 x\right) + \frac{3}{4}i_{12}^{-1}g^2(T^2+\mathcal{S}^2)\\
&- \frac{3}{4}i_{12}^{-1}\,2\mathcal{S}Tg^2\cos x + 3i_{12}g^2 + \underbrace{\frac{3}{2}(T+\mathcal{S})g^2\cos x - \frac{3}{2}(T+\mathcal{S})g^2}_{(\cos x-1)}\Big)\\
= \pi^{3/2} M_1M_2\, e^{-j_{12}g^2}\, i_{12}^{-7/2}\Big(&\frac{15}{4} + 2g^2(1-j_{12}-\cos x) + g^4\left((1-j_{12}-\cos x)^2+\sin^2 x\right)\\
&+ \frac{3}{4}i_{12}^{-1}g^2\left(\mathcal{S}^2+T^2-2\mathcal{S}T\cos x\right) + 3i_{12}g^2 + \frac{3}{2}g^2(T+\mathcal{S})(\cos x-1)\Big).
\end{aligned}$$

Notons

$$\left(\frac{\mathcal{S}T}{st}\right)^{7/2}\frac{1}{M_1M_2}\,\frac{1}{\pi^{3/2}}\,L_{12}(x) =: G_{12}(x),$$

alors ~~en notant à nouveau $G_1(x)$ au lieu de $G_{12}(x)$~~

$$\begin{aligned}
G_{12}(x) &= \left(\frac{\mathcal{S}T}{st}\right)^{7/2} e^{-j_{12}g^2}\, i_{12}^{-7/2}\Big(\frac{15}{4} + 2g^2(1-j_{12}-\cos x) + g^4\left((1-j_{12}-\cos x)^2+\sin^2 x\right) + \frac{3}{4}i_{12}^{-1}g^2\left(\mathcal{S}^2+T^2-2\mathcal{S}T\cos x\right)\\
&\qquad + 3i_{12}g^2 + \frac{3}{2}g^2(T+\mathcal{S})(\cos x-1)\Big)\\
&= \cancel{\left(\frac{\mathcal{S}T}{st}\right)^{7/2}}\left(\cancel{\frac{\mathcal{S}T}{st}}(1-Y_{12})\right)^{-7/2} e^{-j_{12}g^2}\left(\dots\right),
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
Y_{12} &= M_2 s + M_1 t = \tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{2}t\\
Z_{12} &= 2M_1M_2\, st(1-\cos x) = \tfrac{1}{2}st(1-\cos x)\\
\frac{i_{12}}{\mathcal{S}T} &= \frac{1-Y_{12}}{st} \;;\; \frac{\partial j_{12}}{\partial Y_{12}} = \frac{j_{12}}{1-Y_{12}} \;;\; j_{12} = \frac{1-Z_{12}}{1-Y_{12}} \;;\; \mathcal{S} = \frac{s}{1-s} \;;\; T = \frac{t}{1-t} \quad , \; s,t \in \,]0,1[.
\end{aligned}$$

Ainsi:

$$\begin{aligned}
G_{12}(x) = {}&(1-Y_{12})^{-7/2} e^{-j_{12}g^2}\Big(\frac{15}{4} + 2g^2 - 2g^2j_{12} - 2g^2\cos x + g^4\left((1-j_{12}-\cos x)^2+\sin^2 x\right) + \frac{3}{2}g^2(T+\mathcal{S})(\cos x-1)\Big)\\
&+ (1-Y_{12})^{-5/2} e^{-j_{12}g^2}\, 3g^2\,\frac{\mathcal{S}T}{st} + (1-Y_{12})^{-9/2} e^{-j_{12}g^2}\,\frac{3}{4}\,\frac{st}{\mathcal{S}T}\,g^2\left(\mathcal{S}^2+T^2-2\mathcal{S}T\cos x\right) \qquad (12)
\end{aligned}$$

Avant de continuer, on va devoir établir quelques identités concernant les polynômes de Sonine $S_m^{(n)}(x)$, dont la définition est pour $s \in \,]0,1[$, $\mathcal{S} = s/(1-s)$

$$\left(\frac{\mathcal{S}}{s}\right)^{m+1} e^{-x\mathcal{S}} = \frac{1}{(1-s)^{m+1}}\, e^{-x\frac{s}{1-s}} \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} s^n S_m^{(n)}(x). \qquad (13)$$

Lemme : soit $Y_{12}\in\,]0,1[$, $j_{12}=\frac{1-z_{12}}{1-Y_{12}}$, $z_{12}\in[0,1[$, $\alpha\in\mathbb{N}$, alors on a les identités

$$e^{-j_{12}g^2}(1-Y_{12})^{-\alpha/2} = e^{-g^2}\sum_{r,n\geq 0}\frac{(z_{12}g^2)^r}{r!}\,Y_{12}^n\,S^{(n)}_{r+\alpha/2-1}(g^2) \doteq E_0(\alpha) \qquad (14)$$

$$e^{-j_{12}g^2}(1-Y_{12})^{-\alpha/2}\left(\frac{\alpha}{2}-1-j_{12}g^2\right) = e^{-g^2}\sum_{r,n\geq 0}\frac{(z_{12}g^2)^r}{r!}(n+1)\,Y_{12}^n\,S^{(n+1)}_{r+\frac{\alpha}{2}-2}(g^2) \doteq E_1(\alpha) \qquad (15)$$

$$e^{-j_{12}g^2}(1-Y_{12})^{-\alpha/2}\left(\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)\left(\frac{\alpha}{2}-2\right)+j_{12}g^2\left(j_{12}g^2-\alpha-2\right)\right) = e^{-g^2}\sum_{r,n\geq 0}\frac{(z_{12}g^2)^r}{r!}(n+2)(n+1)\,Y_{12}^n\,S^{(n+2)}_{r+\frac{\alpha}{2}-3}(g^2) \doteq E_2(\alpha) \qquad (16)$$

Preuve :

$E_0(\alpha)$:

$$e^{-j_{12}g^2}(1-Y_{12})^{-\alpha/2} = e^{-\frac{1-z_{12}}{1-Y_{12}}g^2}(1-Y_{12})^{-\alpha/2}$$
$$= e^{-g^2\frac{1}{1-Y_{12}}}\,e^{\frac{g^2 z_{12}}{1-Y_{12}}}(1-Y_{12})^{-\alpha/2}$$
$$= e^{-g^2\frac{1-Y_{12}+Y_{12}}{1-Y_{12}}}\sum_{r\geq 0}\frac{(z_{12}g^2)^r}{r!}\frac{1}{(1-Y_{12})^r}\frac{1}{(1-Y_{12})^{\alpha/2}}$$
$$= e^{-g^2}\,e^{-\frac{g^2Y_{12}}{1-Y_{12}}}\sum_{r\geq 0}\frac{(z_{12}g^2)^r}{r!}\frac{1}{(1-Y_{12})^{r+\alpha/2}}$$
$$= e^{-g^2}\sum_{r\geq 0}\frac{(z_{12}g^2)^r}{r!}\underbrace{e^{-g^2\frac{Y_{12}}{1-Y_{12}}}\frac{1}{(1-Y_{12})^{r+\alpha/2}}}_{\underset{\substack{s\leftrightarrow Y_{12}\\ x\leftrightarrow g^2}}{\overset{(13)}{=}}\ \sum_{n\geq 0}Y_{12}^n\,S^{(n)}_{r+\frac{\alpha}{2}-1}(g^2)}$$
$$= e^{-g^2}\sum_{r,n\geq 0}\frac{(z_{12}g^2)^r}{r!}\,Y_{12}^n\,S^{(n)}_{r+\alpha/2-1}(g^2),$$

ce qui établit (14).

$E_1(\alpha)$: En dérivant la relation précédente on a pour le membre de gauche

$$\frac{\partial}{\partial Y_{12}}\left(e^{-j_{12}g^2}(1-Y_{12})^{-\alpha/2}\right) = e^{-j_{12}g^2}(1-Y_{12})^{-\alpha/2}(-g^2)\underbrace{\frac{\partial j_{12}}{\partial Y_{12}}}_{=\frac{j_{12}}{1-Y_{12}}} + e^{-j_{12}g^2}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)(1-Y_{12})^{-\frac{\alpha}{2}-1}(-1)$$
$$= e^{-j_{12}g^2}(1-Y_{12})^{-\frac{\alpha}{2}-1}\left(-j_{12}g^2+\frac{\alpha}{2}\right),$$

et pour le membre de droite

$$\frac{\partial}{\partial Y_{12}}e^{-g^2}\sum_{r,n\geq 0}\frac{(z_{12}g^2)^r}{r!}\,Y_{12}^n\,S^{(n)}_{r+\alpha/2-1}(g^2) = e^{-g^2}\sum_{r,n\geq 0}\frac{(z_{12}g^2)^r}{r!}\,n\,Y_{12}^{n-1}\,S^{(n)}_{r+\frac{\alpha}{2}-1}(g^2).$$

Le terme $n=0$ ne contribue pas dans cette dernière expression, d'où en posant $m=n-1$ on a

$$\frac{\partial}{\partial Y_{12}}e^{-g^2}\sum_{r,n\geq 0}\frac{(z_{12}g^2)^r}{r!}\,Y_{12}^n\,S^{(n)}_{r+\frac{\alpha}{2}-1}(g^2) = e^{-g^2}\sum_{\substack{r\geq 0\\ m\geq 0}}\frac{(z_{12}g^2)^r}{r!}(m+1)\,Y_{12}^m\,S^{(m+1)}_{r+\frac{\alpha}{2}-1}(g^2)$$
$$\overset{m:=n}{=} e^{-g^2}\sum_{r,n\geq 0}\frac{(z_{12}g^2)^r}{r!}(n+1)\,Y_{12}^n\,S^{(n+1)}_{r+\frac{\alpha}{2}-1}(g^2).$$

Égalant les membres de droite et de gauche

$$e^{-j_{12}g^2}(1-Y_{12})^{-\frac{\alpha}{2}-1}\left(\frac{\alpha}{2}-j_{12}g^2\right) = e^{-g^2}\sum_{r,n\geq 0}\frac{(z_{12}g^2)^r}{r!}(n+1)\,Y_{12}^n\,S^{(n+1)}_{r+\frac{\alpha}{2}-1}(g^2),$$

et en posant $\beta/2=\alpha/2+1$ puis $\beta:=\alpha$ on a

$$e^{-j_{12}g^2}(1-Y_{12})^{-\alpha/2}\left(\frac{\alpha}{2}-1-j_{12}g^2\right) = e^{-g^2}\sum_{r,n\geq 0}\frac{(z_{12}g^2)^r}{r!}(n+1)\,Y_{12}^n\,S^{(n+1)}_{r+\frac{\alpha}{2}-2}(g^2),$$

ce qui établit (15).

$E_2(\alpha)$: En dérivant (15), le membre de gauche devient

$$\frac{\partial}{\partial Y_{12}}e^{-j_{12}g^2}(1-Y_{12})^{-\alpha/2}\left(\frac{\alpha}{2}-1-j_{12}g^2\right) = \left(\frac{\alpha}{2}-1-j_{12}g^2\right)\underbrace{\frac{\partial}{\partial Y_{12}}e^{-j_{12}g^2}(1-Y_{12})^{-\alpha/2}}_{=e^{-j_{12}g^2}(1-Y_{12})^{-\alpha/2-1}\left(\frac{\alpha}{2}-j_{12}g^2\right)} + e^{-j_{12}g^2}(1-Y_{12})^{-\alpha/2}(-g^2)\underbrace{\frac{\partial j_{12}}{\partial Y_{12}}}_{=\frac{j_{12}}{1-Y_{12}}}$$
$$= e^{-j_{12}g^2}(1-Y_{12})^{-\alpha/2-1}\left(-j_{12}g^2+\left(\frac{\alpha}{2}-j_{12}g^2\right)\left(\frac{\alpha}{2}-1-j_{12}g^2\right)\right)$$

$$= e^{-j_{12}g^2}(1-Y_{12})^{-\alpha/2-1}\left(\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{2}-1\right) - \frac{\alpha}{2} j_{12} g^2 - \left(\frac{\alpha}{2}-1\right) j_{12} g^2 + j_{12}^2 g^4 - j_{12} g^2\right)$$

$$= e^{-j_{12}g^2}(1-Y_{12})^{-\alpha/2-1}\left(\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{2}-1\right) + j_{12}g^2\left(j_{12}g^2 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} + 1 - 1\right)\right)$$

$$= e^{-j_{12}g^2}(1-Y_{12})^{-\frac{\alpha}{2}-1}\left(\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{2}-1\right) + j_{12}g^2\left(j_{12}g^2-\alpha\right)\right),$$

et le membre de droite et en procédant comme pour $E_1(\alpha)$

$$\frac{\partial}{\partial Y_{12}}\left(e^{-g^2}\sum_{r,n\geq 0}\frac{(z_{12}g^2)^r}{r!}(n+1)\,Y_{12}^n\, S^{(n+1)}_{r+\frac{\alpha}{2}-2}(g^2)\right) = e^{-g^2}\sum_{r,n\geq 0}\frac{(z_{12}g^2)^r}{r!}(n+1)\,n\,Y_{12}^{n-1}\, S^{(n+1)}_{r+\frac{\alpha}{2}-2}(g^2)$$

$$\overset{\substack{m=n-1\\ m:=n}}{=} e^{-g^2}\sum_{r,n\geq 0}\frac{(z_{12}g^2)^r}{r!}(n+2)(n+1)\,Y_{12}^n\, S^{(n+2)}_{r+\frac{\alpha}{2}-2}(g^2).$$

Égalant les membres de droite et de gauche

$$e^{-j_{12}g^2}(1-Y_{12})^{-\frac{\alpha}{2}-1}\left(\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)+j_{12}g^2\left(j_{12}g^2-\alpha\right)\right) = e^{-g^2}\sum_{r,n\geq 0}\frac{(z_{12}g^2)^r}{r!}(n+2)(n+1)\,Y_{12}^n\, S^{(n+2)}_{r+\frac{\alpha}{2}-2}(g^2),$$

avec $\beta = \frac{\alpha}{2}+1$ puis $\beta := \alpha$

$$e^{-j_{12}g^2}(1-Y_{12})^{-\beta/2}\left(\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)\left(\frac{\alpha}{2}-2\right)+j_{12}g^2\left(j_{12}g^2-\alpha-2\right)\right) = e^{-g^2}\sum_{r,n\geq 0}\frac{(z_{12}g^2)^r}{r!}(n+2)(n+1)\,Y_{12}^n\, S^{(n+2)}_{r+\frac{\alpha}{2}-3}(g^2),$$

ce qui établit (16).

(on élimine les termes en j_{12}^k, $k\geq 1$, en commençant par le plus haut degré)

$(1-j_{12}-\cos\chi)^2+\sin^2\chi = (1-j_{12})^2+\cos^2\chi-2\cos\chi(1-j_{12})+\sin^2\chi$
$= 1+j_{12}^2-2j_{12}-2\cos\chi+2\cos\chi\, j_{12}+1$

Appliquant ce lemme, (12) devient

$$G_1(\chi) = (1-Y_{12})^{-7/2}e^{-j_{12}g^2}\Big(\frac{15}{4}+2g^2-2g^2j_{12}-2g^2\cos\chi+g^4\overbrace{\left(2-2j_{12}+j_{12}^2-2\cos\chi+2j_{12}\cos\chi\right)} + \frac{3}{2}g^2(T+S)(\cos\chi-1)\Big)$$

$$+\underbrace{(1-Y_{12})^{-5/2}e^{-j_{12}g^2}}_{=E_0(5)}\,3g^2\frac{ST}{st} + \underbrace{(1-Y_{12})^{-9/2}e^{-j_{12}g^2}}_{=E_0(9)}\,\frac{3}{4}\frac{st}{ST}\,g^2\left(S^2+T^2-2ST\cos\chi\right)$$

$$= E_0(5)\,3g^2\frac{ST}{st} + E_0(9)\,\frac{3}{4}\frac{st}{ST}\,g^2\left(S^2+T^2-2ST\cos\chi\right)$$
$$+(1-Y_{12})^{-7/2}e^{-j_{12}g^2}\Big(\frac{15}{4}+2g^2\underset{-7g^2j_{12}+7g^2j_{12}}{-2g^2j_{12}}-2g^2\cos\chi+g^4 2-2g^4j_{12}+g^4j_{12}^2-2g^4\cos\chi+2g^4j_{12}\cos\chi+\frac{3}{2}g^2(T+S)(\cos\chi-1)\Big)$$

$$= E_0(5)\,3g^2\frac{ST}{st} + E_0(9)\,\frac{3}{4}\frac{st}{ST}\,g^2\left(S^2+T^2-2ST\cos\chi\right) + \underbrace{(1-Y_{12})^{-7/2}e^{-j_{12}g^2}\left(\frac{15}{4}+j_{12}^2g^4-9j_{12}g^2\right)}_{=E_2(7)}$$
$$+(1-Y_{12})^{-7/2}e^{-j_{12}g^2}\Big(2g^2+7g^2j_{12}-2g^2\cos\chi+g^4 2-2g^4j_{12}-2g^4\cos\chi+2g^4j_{12}\cos\chi+\frac{3}{2}g^2(T+S)(\cos\chi-1)\Big)$$

$$= E_0(5)\,3g^2\frac{ST}{st} + E_0(9)\,\frac{3}{4}\frac{st}{ST}\,g^2\left(S^2+T^2-2ST\cos\chi\right) + E_2(7)$$
$$-7(1-Y_{12})^{-7/2}e^{-j_{12}g^2}\left(-g^2j_{12}+\frac{5}{2}-\frac{5}{2}\right) + 2g^2(1-Y_{12})^{-7/2}e^{-j_{12}g^2}\left(\underset{+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}{1}-g^2j_{12}\right)$$
$$-2g^2\cos\chi(1-Y_{12})^{-7/2}e^{-j_{12}g^2}\left(\overset{+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}{1}-g^2j_{12}\right) + (1-Y_{12})^{-7/2}e^{-j_{12}g^2}\left(2g^4-2g^4\cos\chi+\frac{3}{2}g^2(T+S)(\cos\chi-1)\right)$$

$$= E_0(5)\,3g^2\frac{ST}{st} + E_0(9)\,\frac{3}{4}\frac{st}{ST}\,g^2\left(S^2+T^2-2ST\cos\chi\right) + E_2(7)$$
$$-7\underbrace{(1-Y_{12})^{-7/2}e^{-j_{12}g^2}\left(\frac{5}{2}-g^2j_{12}\right)}_{=E_1(7)} + 7\,\frac{5}{2}(1-Y_{12})^{-7/2}e^{-j_{12}g^2} + 2g^2\underbrace{(1-Y_{12})^{-7/2}e^{-j_{12}g^2}\left(\frac{5}{2}-j_{12}g^2\right)}_{=E_1(7)}$$
$$-2\,\frac{3}{2}\,g^2(1-Y_{12})^{-7/2}e^{-j_{12}g^2} - 2g^2\cos\chi\underbrace{(1-Y_{12})^{-7/2}e^{-j_{12}g^2}\left(5/2-g^2j_{12}\right)}_{=E_1(7)} + 2\,\frac{3}{2}\,g^2\cos\chi(1-Y_{12})^{-7/2}e^{-j_{12}g^2}$$
$$+(1-Y_{12})^{-7/2}e^{-j_{12}g^2}\left(2g^4-2g^4\cos\chi+\frac{3}{2}g^2(T+S)(\cos\chi-1)\right)$$

$$= E_0(5)\,3g^2\frac{ST}{st} + E_0(9)\,\frac{3}{4}\frac{st}{ST}\,g^2\left(S^2+T^2-2ST\cos\chi\right) + E_2(7) - 7E_1(7) + 2g^2E_1(7) - 2g^2\cos\chi\, E_1(7)$$
$$+(1-Y_{12})^{-7/2}e^{-j_{12}g^2}\left(\frac{35}{2}-3g^2+3g^2\cos\chi+2g^4-2g^4\cos\chi+\frac{3}{2}g^2(T+S)(\cos\chi-1)\right)$$

$$= E_0(5)\,3g^2\frac{ST}{st} + E_0(9)\,\frac{3}{4}\frac{st}{ST}\,g^2\left(S^2+T^2-2ST\cos\chi\right) + E_2(7) - 7E_1(7) + 2g^2(1-\cos\chi)E_1(7)$$
$$+\underbrace{(1-Y_{12})^{-7/2}e^{-j_{12}g^2}}_{=E_0(7)}\left(\frac{35}{2}+3g^2\left(\cos\chi-1+\frac{1}{2}(T+S)(\cos\chi-1)\right)+2g^4(1-\cos\chi)\right)$$

Ainsi on a finalement

$$\boxed{\begin{aligned} G_{\frac{1}{2}}(x) = {} & E_0(5)\, 3g^2 \frac{\mathcal{S}T}{st} + E_0(9)\, \frac{3}{4} \frac{st}{\mathcal{S}T}\, g^2 \left(\mathcal{S}^2 + T^2 - 2\mathcal{S}T\cos x\right) + E_2(7) + E_1(7)\left(2g^2(1-\cos x) - 7\right) \\ & + E_0(7)\left(\frac{35}{2} + 3g^2(\cos x - 1)\left(1 + \tfrac{1}{2}(T+\mathcal{S})\right) + 2g^4(1-\cos x)\right) \end{aligned}}$$

Qu'est-ce que l'on a réalisé ? On a exprimé $G_1(x)$ en fonction des polynômes de Sonine. Pour continuer, il faut exprimer explicitement $G_1(x)$ en termes des polynômes de Sonine et y remplacer les expressions de Y_{12} et Z_{12}, utiliser la relation binômiale et mettre en évidence les puissances de s et t. On voit tout de suite que pour arriver à mettre en évidence ces puissances, on va devoir faire un développement des fonctions $\mathcal{S} = \mathcal{S}(s)$ et $T = T(t)$. La mise en évidence de ces coefficients ne sera donc pas aisée pour tous les ordres. Mais on va pouvoir se limiter à l'ordre s^0t^0 car on désire b_{00} uniquement.

3)2) Développement de Taylor de $G_1(x)$

Remplaçant $E_i(j)$ et $Y_{12} = 1/2\, s + 1/2\, t$, $Z_{12} = 1/4\, st(1-\cos x)$, $\mathcal{S} = s/1-s$, $T = t/1-t$, on a

$$\begin{aligned} G_{\frac{1}{2}}(x) = e^{-g^2} \sum_{r,n\geq 0} \frac{(Z_{12}g^4)^r}{r!} Y_{12}^n \Bigg(& S^{(n)}_{r+\frac{3}{2}}(g^2)\, 3g^2 \frac{\mathcal{S}T}{st} + S^{(n)}_{r+\frac{7}{2}}(g^2)\, \frac{3}{4}\frac{st}{\mathcal{S}T}\, g^2\left(\mathcal{S}^2 + T^2 - 2\mathcal{S}T\cos x\right) \\ & + (n+2)(n+1)\, S^{(n+2)}_{r+1/2}(g^2) + (n+1)\, S^{(n+1)}_{r+\frac{3}{2}}(g^2)\left(2g^2(1-\cos x) - 7\right) \\ & + S^{(n)}_{r+\frac{5}{2}}(g^2)\left(\frac{35}{2} + 3g^2(\cos x - 1)\left(1 + \tfrac{1}{2}(T+\mathcal{S})\right) + 2g^4(1-\cos x)\right)\Bigg). \end{aligned} \tag{14$_b$}$$

Avec $Y_{12}^n = \frac{1}{2^n}(s+t)^n$ on devrait utiliser la formule du binôme $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ pour mettre en évidence les différentes puissances de s et t, en toute généralité. Néanmoins, étant donné que nous allons par la suite nous intéresser à b_{00}, c'est-à-dire à l'ordre le plus bas s^0t^0, alors on en a pas besoin et on développe le membre de droite de (14) au plus bas ordre en s et t avec :

$$\mathcal{S}T = st\,\frac{1}{1-s}\,\frac{1}{1-t} = st\left(1 + \nabla\left(\frac{1}{1-s}\frac{1}{1-t}\right)\Big|_{s=t=0}\binom{s}{t} + \dots\right) = st\,(1 + st + \dots) = st + \dots$$

$$\frac{\mathcal{S}T}{st} = \frac{st}{st}\,\frac{1}{1-s}\,\frac{1}{1-t} = 1 + \dots$$

$$\frac{st}{\mathcal{S}T} = st\,\frac{(1-s)(1-t)}{st} = 1 - s - t + st$$

$$\mathcal{S}^2 = \frac{s^2}{(1-s)^2} = s^2\,(1 + \dots) = s^2 + \dots$$

$$T^2 = t^2 + \dots$$

$$\mathcal{S} = s + \dots$$

$$T = t + \dots$$

d'où

$$\frac{st}{\mathcal{S}T}\left(\mathcal{S}^2 + T^2 - 2\mathcal{S}T\cos x\right) = (1 - s - t + st)\left(s^2 + t^2 - 2st\cos x + \dots\right) = -2st\cos x = O(s,t)$$

et en remplaçant on a ainsi

$$\begin{aligned} G_{\frac{1}{2}}(x) = e^{-g^2} \sum_{r,n\geq 0} \underbrace{\frac{1}{2^r}\, s^r t^r (1-\cos x)^r\, \frac{g^{2r}}{r!}\left(\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}t\right)^n}_{= O(1) \Leftrightarrow r = n = 0} \Bigg(& S^{(n)}_{r+3/2}(g^2)\, 3g^2 + S^{(n)}_{r+\frac{7}{2}}(g^2)\, \cancelto{0}{\frac{3}{4}g^2\left(-2st\cos x + \dots\right)} \\ & + (n+2)(n+1)\, S^{(n+2)}_{r+1/2}(g^2) + (n+1)\, S^{(n+1)}_{r+3/2}(g^2)\left(2g^2(1-\cos x) - 7\right) \\ & + S^{(n)}_{r+\frac{5}{2}}(g^2)\left(\frac{35}{2} + 3g^2(\cos x - 1)(1 + \dots) + 2g^4(1-\cos x)\right)\Bigg) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = e^{-g^2}\Bigg(& \overbrace{S^{(0)}_{3/2}(g^2)}^{=1} 3g^2 + 2\, S^{(2)}_{1/2}(g^2) + S^{(1)}_{3/2}(g^2)\left(2g^2(1-\cos x) - 7\right) \\ & + \underbrace{S^{(0)}_{5/2}(g^2)}_{=1}\left(\frac{35}{2} + 3g^2(\cos x - 1) + 2g^4(1-\cos x)\right)\Bigg) \end{aligned}$$

$$= e^{-g^2}\left(\cancel{3g^2} + 2\, S^{(2)}_{1/2}(g^2) + S^{(1)}_{3/2}(g^2)\left(2g^2(1-\cos x) - 7\right) + \frac{35}{2} + 3g^2(\cos x \cancel{-1}) + 2g^4(1-\cos x)\right).$$

On utilise

$$S^{(1)}_{\ell}(x) = \ell + 1 - x$$

$$S^{(2)}_{\ell}(x) = 1/2\,(\ell+1)(\ell+2) - (\ell+2)x + 1/2\, x^2$$

(8)

$$\Rightarrow \quad S^{(1)}_{3/2}(g^2) = \frac{3}{2}+1-g^2 = \frac{5}{2}-g^2$$
$$S^{(2)}_{1/2}(g^2) = 1/2\,(1/2+1)(1/2+2) - (1/2+2)\,g^2 + 1/2\, g^4 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2} - \frac{5}{2}g^2 + \frac{1}{2}g^4 = \frac{15}{2^3} - \frac{5}{2}g^2 + \frac{1}{2}g^4,$$

pour obtenir

$$G_{12}(x) = e^{-g^2}\left(\frac{15}{2^2} - 5g^2 + g^4 + \left(\frac{5}{2}-g^2\right)\left[2g^2(1-\cos x) - 7\right) + \frac{35}{2} + 3g^2\cos x + 2g^4 - 2g^4\cos x\right)$$
$$= e^{-g^2}\left(\frac{15}{4} + \frac{70}{4} - 5g^2 + g^4 + \frac{5}{2}\left(2g^2(1-\cos x)-7\right) - g^2\left(2g^2(1-\cos x)-7\right) + 3g^2\cos x + 2g^4 - 2g^4\cos x\right)$$
$$= e^{-g^2}\left(\frac{15}{4} + \frac{70}{4} - 5g^2 + g^4 + 5g^2(1-\cos x) - \frac{35}{2} - 2g^4(1-\cos x) + 7g^2 + 3g^2\cos x + 2g^4 - 2g^4\cos x\right)$$
$$= e^{-g^2}\left(\frac{15}{4} + g^2(-5+7) + g^4(1+2) + 5g^2 - 5g^2\cos x - 2g^4 + 2g^4\cos x + 3g^2\cos x - 2g^4\cos x\right)$$
$$= e^{-g^2}\left(\frac{15}{4} + 7g^2 + g^4 - 2g^2\cos x\right) \qquad (15)b$$

On aimerait avoir une expression de la forme

$$G_{12}(x) = e^{-g^2}\sum_{pqre\geq 0} A_{pqre}\,(s/2)^p (t/2)^q\, g^{2r}\cos^e x, \qquad (16)b$$

d'où par comparaison de (15) et (16) on a $p=q=0\ \forall r,e$ et

$$\begin{cases} A_{0000} = \frac{15}{4} \\ A_{0010} = 7 \\ A_{0011} = -2 \\ A_{0020} = 1 \end{cases} \qquad (16bis)$$

Ces 4 coefficients déterminent l'ordre le plus bas, et par conséquent b_{00}.

3)3) La fonction $\Omega^{(e)}_1(r)$

On a

$$[S^{(p)}_{5/2}(W_1^2)\,W_1^2,\ S^{(q)}_{5/2}(W_2^2)\,W_2^2]_{12} = \frac{1}{s^p t^q}\left(\frac{\partial^p}{\partial s}\frac{\partial^q}{\partial t}\right)^{7/2}\frac{1}{\pi^3}\int d^3g\, db\, d\varepsilon\; g b\,\left(L_{12}(0) - L_{12}(x)\right) + O(s^k t^\ell,\ k\neq p, \ell\neq q)$$

or on a calculé

$$G_{12}(x) = \left(\frac{\partial^p}{\partial s}\frac{\partial^q}{\partial t}\right)^{7/2}\frac{1}{M_1M_2}\frac{1}{\pi^{3/2}}\,L_{12}(x) = e^{-g^2}\sum_{pqre\geq 0} A_{pqre}\,(M_1 s)^p (M_2 t)^q g^{2r}\cos^e x,$$

d'où

$$M_1M_2\frac{1}{\pi^{3/2}}G_1(x) = \left(\frac{\partial^p}{\partial s}\frac{\partial^q}{\partial t}\right)^{7/2}\frac{1}{\pi^3}L_{12}(x) = M_1M_2\frac{1}{\pi^{3/2}}\, e^{-g^2}\sum_{pqre\geq 0} A_{pqre}\,(M_1 s)^p (M_2 t)^q g^{2r}\cos^e x,$$

ainsi

$$[S^{(p)}_{5/2}W_1^2,\ S^{(q)}_{5/2}W_1^2] = M_1M_2\frac{1}{\pi^{3/2}}\int d^3g\, db\, d\varepsilon\; g b\, e^{-g^2}\sum_{r,e\geq 0} A_{pqre}\, M_1^p M_2^q\, g^{2r}(1-\cos^e x)$$
$$= M_1^{p+1} M_2^{q+1}\frac{1}{\pi^{3/2}}\int d^3g\, db\, d\varepsilon\; g b\, e^{-g^2}\sum_{r,e\geq 0} A_{pqre}\, g^{2r}(1-\cos^e x).$$

Il y a symétrie sphérique de notre solution en g, donc $d^3g = 4\pi g^2 dg$. De plus, il y a aussi indépendance dans l'angle ε, $\varepsilon\in[0,2\pi]$, par conséquent

$$[S^{(p)}_{5/2}W_1^2,\ S^{(q)}_{5/2}W_1^2] = 8\pi^{1/2} M_1^{p+1}M_2^{q+1}\int_0^\infty dg\, db\; g b\, e^{-g^2}\sum_{re\geq 0} A_{pqre}\, g^{2r+2}(1-\cos^e x)$$
$$= 8\, M_1^{p+1} M_2^{q+1}\sum_{re\geq 0} A_{pqre}\ \underbrace{\sqrt{\pi}\int_0^\infty dg\, db\; g b\, e^{-g^2} g^{2r+2}(1-\cos^e x)}_{:=\ \Omega^{(e)}_1(r)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} &[S^{(p)}_{5/2}(W_1^2)\,W_1^2,\ S^{(q)}_{5/2}(W_2^2)\,W_2^2]_{12} = 8\,M_1^{p+1}M_2^{q+1}\sum_{re\geq 0} A_{pqre}\,\Omega^{(e)}_1(r) \\ &\Omega^{(e)}_1(r) = \sqrt{\pi}\int_0^\infty dg\, db\, g b\, e^{-g^2} g^{2r+2}(1-\cos^e x)\end{aligned}} \qquad (17)$$

La fonction $\Omega^{(e)}_1(r)$ est connue pour un gaz de maxwell (calcul numérique). On a

$$\Omega_{12}^{(e)}(r) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi kT}{m_0 M_1 M_2}}\left(\frac{\varkappa}{2kT}\right)^{\frac{2}{\nu-1}} A_e(\nu)\, \Gamma\left(r+2-\frac{2}{\nu-1}\right),$$

avec dans notre cas pour un gaz de molécules maxwelliennes, $\nu = 5$, $M_1 = m_1/m_0 = \frac{1}{2}$, $M_2 = m_2/m_0 = 1/2$, $m_0 = m_1 + m_2 = 2m$ on a

$$\Omega_1^{(e)}(r) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi kT}{2m\,1/2\,1/2}}\sqrt{\frac{\varkappa}{2kT}}\, A_e(5)\, \underbrace{\Gamma\left(r+2-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \Gamma(1/2 + r+1) \qquad ; \quad \Gamma(1/2+n) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}(2n-1)!!$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{r+1}}(2r+1)!!$$

$$= \sqrt{\frac{\pi kT}{m}\frac{\varkappa}{2kT}\pi}\;\frac{1}{2^{r+1}}(2r+1)!!\; A_e(5)$$

$$= \frac{\pi}{2^{r+1}}(2r+1)!!\; A_e(5)\sqrt{\frac{\varkappa}{2m}}$$

$$= \frac{\pi}{2^{r+2}}(2r+1)!!\; A_e(5)\sqrt{\frac{2\varkappa}{m}}\,. \tag{18}$$

De plus, on a les relations $\Omega_1^{(0)}(r) = 0$ et $\Omega_1^{(e)}(1) > 0 \;\forall e>0, \forall r>0$.

3)4) Expression de b_{00}

(17) et (18) avec les valeurs trouvées des A_{pqre} donne

$$b_{00} = [S_{5/2}^{(0)} W_1^2, S_{5/2}^{(0)} W_1^2] = 8\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\sum_{r,e\geq 0} A_{pqre}\,\Omega_1^{(e)}(r)$$

$$= 2A_{0000}\,\underbrace{\cancel{\Omega_1^{(0)}(0)}}_{=0} + 2A_{0010}\,\underbrace{\cancel{\Omega_1^{(0)}(1)}}_{=0} + 2A_{0011}\,\Omega_1^{(1)}(1) + 2A_{0020}\,\underbrace{\cancel{\Omega_1^{(0)}(2)}}_{=0}$$

$$= 2\,(-2)\,\Omega_1^{(1)}(1)$$

$$= -4\,\frac{\pi}{2^3}(2+1)!!\; A_1(5)\sqrt{\frac{2\varkappa}{m}}$$

$$= -\frac{1}{2}\pi\cdot 3\; A_1(5)\sqrt{\frac{2\varkappa}{m}}$$

$$= -\frac{3}{2}\pi\; A_1(5)\sqrt{\frac{2\varkappa}{m}}\,.$$

4) Coefficient c_0

Comme nous avons montré que $c_0 = \beta_0\, b_{00}^{-1}$, avec $\beta_0 = 15/4$, on a ainsi

$$c_0 = -\frac{15}{4}\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{A_1(5)}\sqrt{\frac{m}{2\varkappa}}$$

$$= -\frac{\cancel{3}\cdot 5\cdot\cancel{2}}{2\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}}\,\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{A_1(5)}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2m}{\varkappa}}$$

$$= -\frac{5}{4}\,\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{A_1(5)}\sqrt{\frac{2m}{\varkappa}}$$

Les coefficients de viscosité sont donc :

$$\zeta_n^{(1)}(r,t) = -\frac{5}{3}k_B T\left(-\frac{5}{4}\right)\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{A_1(5)}\sqrt{\frac{2m}{\varkappa}} = \frac{25}{12\pi}\,k_B T\,\frac{1}{A_1(5)}\sqrt{\frac{2m}{\varkappa}}$$

$$\zeta_c^{(1)}(r,t) = -\frac{5}{2}k_B\,\frac{\nabla_r T\cdot V}{\nabla_r V}\left(-\frac{5}{4}\right)\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{A_1(5)}\sqrt{\frac{2m}{\varkappa}} = \frac{25}{8\pi}\,k_B\,\frac{\nabla_r T\cdot V}{\nabla_r V}\,\frac{1}{A_1(5)}\sqrt{\frac{2m}{\varkappa}}\,.$$

Ainsi: corrections ③ ①

$$L_1(x) = M_1M_2\,\pi^{3/2} e^{-j_1g^2} i_1^{-7/2}\left(\frac{M_1}{M_2}\frac{3\cdot 5}{2^2} + i_1\left(\frac{3}{2}(v_1^2+v_2^2) + 2\,\frac{g^2}{i_1}(1-j_1+\cos x)\right) + i_1^2\frac{M_2}{M_1}\times\right.$$
à vérifier !
$$\left.\times\frac{g^4}{i_1^2}\left(2+2\cos x - 2\cos x\, j_1 - 2j_1 + j_1^2\right)\right)$$

$$= M_1M_2\,\pi^{3/2} e^{-j_1g^2} i_1^{-7/2}\left(\frac{M_1}{M_2}\frac{15}{4} + \frac{3}{2}i_1(v_1^2+v_2^2) + 2g^2(1-j_1+\cos x) + \cancel{i_1^{2}}\frac{M_2}{M_1}\frac{g^4}{\cancel{i_1}}(2+2\cos x-2\cos x\, j_1 - 2j_1+j_1^2)\right)$$

avec: $v_1^2+v_2^2 = a^2+g'^2-2ag' + a^2+g^2-2ag$, $a = \frac{M_1}{i_1}(\delta g' + Tg)$
$$= 2a^2 + 2g^2 - 2a(g+g')$$
$$= 2\frac{M_1^2}{i_1^2}(\delta g'+Tg)^2 + 2g^2 - 2\frac{M_1}{i_1}(\delta g'+Tg)(g+g')$$
$$= 2\frac{M_1^2}{i_1^2}g^2(\delta^2+T^2+2\delta T\cos x) + 2g^2 - 2\frac{M_1}{i_1}(\delta g'g + \delta g'^2 + Tg^2 + Tgg')$$
$$= \frac{2g^2}{i_1}\left(\frac{M_1^2}{i_1}(\delta^2+T^2+2\delta T\cos x) + i_1 - M_1(\delta\cos x + \delta + T + T\cdot\cos x)\right)$$
$$= \frac{2g^2}{i_1}\left(\frac{M_1M_1}{i_1}(\delta^2+T^2+2\delta T\cos x) + i_1 - M_1(\delta+T)(\cos x+1)\right)$$
$$= \frac{2g^2}{i_1}\left(\frac{M_1M_1}{i_1}(\delta^2+T^2+2\delta T\cos x) + i_1 - M_1(\delta+T)\cos x - M_1(\delta+T)\right) \quad , M_1=M_2$$
$$= \frac{2g^2}{i_1}\left(\underbrace{\frac{M_1M_2}{i_1}(\delta^2+T^2+2\delta T\cos x) - M_2(\delta+T) - 1}_{=-j_1} + 1 - M_1(\delta+T)\cos x + \boxed{i_1}\right)$$
$$= \frac{2g^2}{i_1}\left(1 - j_1 - M_1(\delta+T)\cos x\right) + 2g^2$$

Ainsi: (avec $M_1=M_2$ où ça nous arrange)
$$L_1(x) = M_1M_2\,\pi^{3/2}e^{-j_1g^2}i_1^{-7/2}\left(\frac{15}{4} + \frac{3}{\cancel{2}}i_1\cancel{2}g^2 + \frac{3}{\cancel{2}}\cancel{2}g^2\left(1-j_1-M_1(\delta+T)\cos x\right) + 2g^2(1-j_1+\cos x)\right.$$
$$\left. + g^4\left(2+2\cos x - 2\cos x\, j_1 - 2j_1 + j_1^2\right)\right)$$
$$= M_1M_2\,\pi^{3/2}e^{-j_1g^2}i_1^{-7/2}\left(\frac{15}{4} + i_1 3g^2 + 3g^2 - 3g^2j_1 - 3g^2M_1(\delta+T)\cos x + 2g^2 - 2g^2j_1\right.$$
$$\left. + 2g^2\cos x + 2g^4 + 2g^4\cos x - 2g^4\cos x\, j_1 - 2g^4j_1 + g^4j_1^2\right)$$
$$= M_1M_2\,\pi^{3/2}e^{-j_1g^2}i_1^{-7/2}\left(\frac{15}{4} + i_1 3g^2 + 5g^2 - 5g^2j_1 \boxed{- 3g^2M_1(\delta+T)\cos x + 2g^2\cos x} + 2g^4\right.$$
$$\left. + 2g^4\cos x - 2g^4\cos x\, j_1 - 2g^4j_1 + g^4j_1^2\right) \quad , i_1 = 1 + M_1(\delta+T)$$

avec :
$$-3g^2M_1(\delta+T)\cos x + 2g^2\cos x = g^2\cos x\left(-3M_1(\delta+T) - 3 + 5\right)$$
$$= -3g^2\cos x\underbrace{\left(1+M_1(\delta+T)\right)}_{=i_1} + 5g^2\cos x \, ,$$

donc:
$$L_1(x) = M_1M_2\,\pi^{3/2}e^{-j_1g^2}i_1^{-7/2}\left(\frac{15}{4} + 3g^2i_1(1-\cos x) + 5g^2\cos x + 5g^2 - 5g^2j_1 + 2g^4 + 2g^4\cos x\right.$$
$$\left. - 2g^4\cos x\, j_1 - 2g^4j_1 + g^4j_1^2\right)$$
✓: ok: vérifié.

Passons à la p.4: étude de $G_1(x)$:
$$G_1(x) = \left(\frac{\delta T}{\delta t}\right)^{7/2}\frac{1}{\pi^3}L_1(x)$$
$$= \frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}}e^{-j_1g^2}\underbrace{\left(\frac{\delta T}{\delta t}\right)^{7/2}i_1^{-7/2}}_{=\frac{1}{(1-\gamma_1)^{7/2}}}\left(\dots\right)$$

$$= \underbrace{\frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}}e^{-j_1g^2}\frac{1}{(1-\gamma_1)^{7/2}}3g^2i_1(1-\cos x)}_{} + \frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}}e^{-j_1g^2}\frac{1}{(1-\gamma_1)^{7/2}}\left(\frac{15}{4} + 5g^2\cos x + 5g^2 - 5g^2j_1\right.$$
$$+2g^4 + 2g^4\cos x - 2g^4\cos x\, j_1$$
$$\left. - 2g^4j_1 + g^4j_1^2\right)$$
$$= \frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}}3g^2(1-\cos x)\frac{\delta T}{\delta t}e^{-j_1g^2}\frac{1}{(1-\gamma_1)^{5/2}}$$
$$= \frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}}3g^2(1-\cos x)\frac{\delta T}{\delta t}E_0(5)$$

$$= \frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}}3g^2(1-\cos x)\frac{\delta T}{\delta t}E_0(5) + \overbrace{\frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}}e^{-j_1g^2}\frac{1}{(1-\gamma_1)^{7/2}}\left(\frac{15}{4} + g^4j_1^2 - 9g^2j_1\right)}^{=E_2(7)}$$
$$+ \frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}}e^{-j_1g^2}\frac{1}{(1-\gamma_1)^{7/2}}\left(5g^2\cos x + 5g^2 + 4g^2j_1 + 2g^4 + 2g^4\cos x - 2g^4\cos x\, j_1 - 2g^4j_1\right)$$

correction (4)
(2)

$$= \frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}}\left(3g^2(1-\cos\chi)\frac{\delta T}{\delta t}E_0(5)+E_2(7)\right)+\frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}}e^{-j_1g^2}\frac{1}{(1-\gamma_1)^{7/2}}\,g^2\left(5-2g^2j_1\right)$$

$$+\frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}}e^{-j_1g^2}\frac{1}{(1-\gamma_1)^{7/2}}\,g^2\cos\chi\left(5-2g^2j_1\right)+\frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}}\underbrace{e^{-j_1g^2}\frac{1}{(1-\gamma_1)^{7/2}}}_{=E_0(7)}g^4\left(2+2\cos\chi\right)$$

$$-\frac{M_1M_2}{\pi^{7/2}}e^{-j_1g^2}\frac{1}{(1-\gamma_1)^{7/2}}\,4\left(-j_1g^2\right)$$

$$=\frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}}\left(3g^2(1-\cos\chi)\frac{\delta T}{\delta t}E_0(5)+E_2(7)+E_0(7)\,2g^4(1+\cos\chi)\right)$$

$$+\frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}}g^2\,2\,e^{-j_1g^2}\frac{1}{(1-\gamma_1)^{7/2}}\left(\cancel{-\tfrac52}\underbrace{-g^2j_1+\tfrac52}_{\to E_1(7)}\cancel{-\tfrac52}\right)+\frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}}e^{-j_1g^2}\frac{1}{(1-\gamma_1)^{7/2}}g^2\cos\chi\cdot2\left(\underbrace{\tfrac52-g^2j_1}_{\to E_1(7)}\right)$$

$$-\frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}}e^{-j_1g^2}\frac{1}{(1-\gamma_1)^{7/2}}\,4\left(\underbrace{\tfrac52-j_1g^2}_{\to E_1(7)}-\tfrac52\right)$$

$$=\frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}}\left(3g^2(1-\cos\chi)\frac{\delta T}{\delta t}E_0(5)+E_2(7)+E_0(7)\cdot2g^4(1+\cos\chi)+2g^2E_1(7)+2g^2\cos\chi\,E_1(7)-4E_1(7)\right)$$

$$+\cancel{\frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}}\underbrace{e^{-j_1g^2}\frac{1}{(1-\gamma_1)^{7/2}}}_{\to E_0(7)}}\,2g^2\,\frac{10}{2}+\frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}}\underbrace{e^{-j_1g^2}\frac{1}{(1-\gamma_1)^{7/2}}}_{\to E_0(7)}\,4\cdot\frac52$$

$$=\frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}}\left(3g^2(1-\cos\chi)\frac{\delta T}{\delta t}E_0(5)+E_2(7)+E_0(7)\cdot\left(2g^4(1+\cos\chi)+10+\cancel{10}\,g^2\right)+E_1(7)\left(+2g^2+2g^2\cos\chi-4\right)\right)$$

ok.

Remplace avec les polynômes de Sonine :

$$G_1(\chi)=\frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}}e^{-g^2}\sum_{r,n\geq0}\frac{(z_1g^2)^r}{r!}\gamma_1^n\Big(3g^2(1-\cos\chi)\frac{\delta T}{\delta t}S^{(n)}_{r+\frac32}(g^2)+(n+2)(n+1)S^{(n+2)}_{r+1/2}(g^2)$$
$$+S^{(n)}_{r+\frac52}(g^2)\left(2g^4+2g^4\cos\chi+\cancel{10g^2}+10\right)+(n+1)S^{(n+1)}_{r+\frac32}(g^2)\left(+2g^2+2g^2\cos\chi-4\right)\Big)$$

à l'ordre le plus bas :

$$G_1(\chi)=\frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}}e^{-g^2}\Big(3g^2(1-\cos\chi)+2\,S^{(2)}_{1/2}(g^2)+2g^4+2g^4\cos\chi+\cancel{10g^2}+10+S^{(1)}_{3/2}(g^2)\left(+2g^2+2g^2\cos\chi-4\right)\Big)$$

$$S^{(1)}_{3/2}(g^2)=\frac52-g^2$$
$$S^{(2)}_{1/2}(g^2)=\frac{15}{4}-\frac52g^2+\frac12g^4$$

Ainsi :

$$G_1(\chi)=\frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}}e^{-g^2}\Big(3g^2-3g^2\cos\chi+\frac{15}{2}-5g^2+g^4+2g^4+2g^4\cos\chi+\cancel{10g^2}+10$$
$$+\frac52\left(+2g^2+2g^2\cos\chi-4\right)-g^2\left(+2g^2+2g^2\cos\chi-4\right)\Big)$$

$$=\frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}}e^{-g^2}\Big(-2g^2-3g^2\cos\chi+\frac{15}{2}+\cancel{10}+3g^4+\cancel{2g^4\cos\chi}+\frac52 2g^2+5g^2\cos\chi\cancel{-10}-g^4\cdot2-\cancel{2g^4\cos\chi}+4g^2\Big)$$

$$=\frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}}e^{-g^2}\left(\frac{15}{2}+7g^2+2g^2\cos\chi+g^4\right)$$

ok : vérifié.

$$=\frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}}e^{-g^2}\sum_{pqr\ell\geq0}A_{pqr\ell}\,(M_1s)^p(M_2t)^q\,g^{2r}\cos^\ell\chi$$

d'où :

$$\begin{cases}A_{0000}=15/2\\A_{0010}=7\\A_{0020}=1\\A_{0011}=2\end{cases}$$

La solution s'écrit donc :

$$[\dots,\dots]_{12}=8M_1^{p+1}M_2^{q+1}\sum_{r\ell\geq0}A_{pqr\ell}\,\Omega_1^{(\ell)}(r)$$

; suite : voir page 6.

p. 158 : problème de nullité ? $\boxed{2^e \text{ terme}}$ + intro

(0)

A12 notations

le calcul de

$$[S(W_1^2)\,W_1\,,\,S(W_1^2)W_1]_1 \qquad , \quad [S(W_1^2)\,\mathring{W}_1 W_1\,,\,S(W_1^2)\mathring{W}_1 W_1]_1 \tag{1}$$

A voir : il semblerait que $[S_{3/2}^{(p)}(W_1^2)W_1\,,\,S_{3/2}^{(q)}(W_1^2)W_1]_1$ puisse être dérivé, grâce à (p. 83)

$$[F_1, G_1+G_2]_{12} = [F,G]_1\,, \tag{2}$$

de

$$[S_{3/2}^{(p)}(W_1^2)W_1\,,\,S_{3/2}^{(q)}(W_2^2)W_2]_{12} + [S_{3/2}^{(p)}(W_1^2)W_1\,,\,S_{3/2}^{(q)}(W_1^2)W_1]_{12} \tag{3}$$

En effet, d'après la linéarité on a que (3) est égal à

$$[S_{3/2}^{(p)}(W_1^2)W_1\,,\,S_{3/2}^{(q)}(W_2^2)W_2 + S_{3/2}^{(q)}(W_1^2)W_1]_{12} = [S_{3/2}^{(p)}(W_1^2)\;W_1\,,\,S_{3/2}^{(q)}(W_1^2)W_1]_1\,, \tag{4}$$

structure générale du calcul

en prenant $m_1 = m_2$ et avec une loi d'interaction entre paires de particules identiques. Il faut cependant, avant d'aller plus loin, clarifier la signification de ces notations.

Soit F une fonction définie dans le premier domaine de vitesses (on prend un gaz de deux types de molécules, gaz binaire, pour lequel l'espace des vitesses de chaque espèce est regardé comme distinct de l'autre), alors dans les notations du Chapman on écrit :

$$n_1^2\, I_1[F] = \int d^3c\, d^3e'\; g\, \alpha_1\; f_1^{(0)} f^{(0)}\,(F_1 + F - F_1' - F') \tag{5}$$

avec α_1 qui est la section efficace entre molécules de même espèce, tandis que l'on notera α_{12} la section efficace différentielle pour des molécules différentes. On a une définition similaire à (5) mais pour $I_2(F)$. Supposons K une fonction des vitesses c_1 et c_2 des deux types de molécules, alors on écrit :

$$n_1 n_2\, I_{12}[K] = \int d^3e'\, d^3c_2\; f_1^{(0)} f_2^{(0)}\,(K-K')\; g\,\alpha_{12} \tag{6}$$

$$n_1 n_2\, I_{21}[K] = \int d^3e'\, d^3c_1\; f_1^{(0)} f_2^{(0)}\,(K-K')\; g\,\alpha_{12} \tag{7}$$

Ainsi $I_1[F]$ et $I_{12}[K]$ sont fonctions de c_1, tandis que $I_2[F]$ et $I_{21}[K]$ sont fonctions de c_2. En effet :

$$f_i^{(0)} = n_i \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\!\left(-\frac{m}{2kT}(c_i - c_0)^2\right) \qquad , \; C_i = c_i - c_0$$

On définit les fameux produits scalaires $[F,G]$ comme suit. Supposons que F, G soient des fonctions définies dans le premier domaine de vitesses, alors

$$[F,G]_1 = \int d^3c_1\; G_1\, I_1[F]\,.$$

En effet, cette dernière expression fait sens car $I_1[F]$ est fonction de c_1, de même que G_1. On va utiliser les relations :

$$f_1^{(0)\prime} f_1^{(0)} = f^{(0)} f^{(0)} \quad ; \quad f_1^{(0)\prime} f_2^{(0)\prime} = f_1^{(0)} f_2^{(0)} \quad ; \quad f_2^{(0)\prime} f^{(0)\prime} = f_2^{(0)} f^{(0)}$$

$$\int d^3e'\, d^3c\, d^3c_1\; g\alpha_1\; \phi_1\,(F_1 G + F G_1 - F_1' G' - F' G_1') = \frac{1}{4}\int d^3e'\, d^3c\, d^3c_1\; g\alpha_1\; (\phi + \phi_1 - \phi' - \phi_1')(F_1 G + F G_1 - F_1' G' - F' G_1')$$

Avec ces relations, si F, H sont définies dans le premier domaine et G, K dans le second, on peut montrer que

$$[F_1 + G_2\,,\, H_1 + K_2]_{12} = [H_1 + K_2\,,\, F_1 + G_2]$$

ce qui est l'équivalent de $[F,G]_1 = [G,F]_1$. Si n_1 et n_2 représentent le même gaz, de façon à ce que $\alpha_{12} = \alpha_1$, alors

$$[F_1, G_1 + G_2]_{12} = [F,G]_1\,.$$

Maintenant on comprend mieux (3). On en conclut que pour calculer ce qui nous intéresse, il faudra d'abord calculer

$$[S_{3/2}^{(p)}(W_1^2)W_1\,,\,S_{3/2}^{(q)}(W_i^2)W_i]_{12}$$

fin intro

1) Structure générale du calcul
   1) Position du problème
   2) Coefficient β_q
   3) Notations
2) Premier terme $[1,2]_{12}$
   1) Simplification de L_2
   2) Développement de Taylor
   3) Expression du premier terme
3) Second terme $[1,1]_{12}$
   1) Simplification de L_1
   2) Développement de Taylor
   3) Expression du second terme
4) Expression du coefficient

déjà tapé (1e page)

Calcul de $[S_{s_{1/2}}^{(p)}(W^2)W^2,\ S_{s_{1/2}}^{(q)}(W^2)W^2]_{12}$

La démarche est similaire que pour le calcul de $[S_{s_{1/2}}^{(p)}(W_1^2)W_1^2,\ S_{s_{1/2}}^{(q)}(W_2^2)W_2^2]_{12}$. L'expression en question est égale au coefficient de $s^p t^q$ de l'expansion de

$$\left(\frac{sT}{st}\right)^{7/2}\frac{1}{\pi^3}\int d^3g\, d\varepsilon\, db\ g b\left(L_1(0)-L_1(\chi)\right) \tag{1}$$

$$L_1(\chi)=\int d^3W_0\, e^{-W_0^2-g^2-sW_1'^2-TW_1^2}\, W_1'^2 W_1^2 \tag{2}$$

En utilisant des relations similaires à celles du calcul précédent, on a

$$W_0^2+g^2+sW_1'^2+TW_1^2 = i_1 W_0^2+i_2 g^2-2\sqrt{M_1M_2}\,W_0(sg'+Tg)$$
$$i_1 = 1+M_1(s+T)$$
$$i_2 = 1+M_2(s+T)$$

ce qui donne

$$L_1(\chi)=\int d^3W_0\, \exp\left(-i_1W_0^2-i_2g^2+2\sqrt{M_1M_2}\,W_0(sg'+Tg)\right)W_1'^2W_1^2$$

Soit

$$W_1=\sqrt{M_1}\,W_0-\sqrt{M_2}\,g$$
$$W_1'=\sqrt{M_1}\,W_0-\sqrt{M_2}\,g'$$

alors

$$W_1'^2 = M_1W_0^2+M_2g'^2-2\sqrt{M_1M_2}\,W_0g' = M_1W_0^2+M_2g^2-2\sqrt{M_1M_2}\,W_0g' \tag{3}$$
$$W_1^2 = M_1W_0^2+M_2g^2-2\sqrt{M_1M_2}\,W_0g$$

Soit

$$j_1 = i_2-\frac{M_1M_2}{i_1}\left(s^2+T^2+2sT\cos\chi\right),$$
$$V = W_0-\frac{\sqrt{M_1M_2}}{i_1}(sg'+Tg), \qquad d^3V=d^3W_0, \tag{4}$$

alors

$$\begin{aligned}
-i_1W_0^2-i_2g^2+2\sqrt{M_1M_2}\,W_0(sg'+Tg) &= -i_1\left(V+\frac{\sqrt{M_1M_2}}{i_1}(sg'+Tg)\right)^2-i_2g^2+2\sqrt{M_1M_2}\,W_0(sg'+Tg)\\
&= -i_1V^2-i_1\frac{M_1M_2}{i_1^2}(sg'+Tg)^2-2i_1V\frac{\sqrt{M_1M_2}}{i_1}(sg'+Tg)\\
&\quad -i_2g^2+2\sqrt{M_1M_2}(sg'+Tg)\left(V+\frac{\sqrt{M_1M_2}}{i_1}(sg'+Tg)\right)\\
&= -i_1V^2-\cancel{i_1}\frac{M_1M_2}{i_1^{\cancel{2}}}(sg'+Tg)^2-2V\cancel{\sqrt{M_1M_2}(sg'+Tg)}-i_2g^2\\
&\quad +2\cancel{\sqrt{M_1M_2}(sg'+Tg)V}+2\sqrt{M_1M_2}(sg'+Tg)\frac{\sqrt{M_1M_2}}{i_1}(sg'+Tg)\\
&= -i_1V^2-i_2g^2-\frac{M_1M_2}{i_1}(sg'+Tg)^2+2\frac{M_1M_2}{i_1}(sg'+Tg)^2\\
&= -i_1V^2-i_2g^2+\frac{M_1M_2}{i_1}(sg'+Tg)^2\\
&= -i_1V^2-g^2\left(i_2-\frac{1}{g^2}\frac{M_1M_2}{i_1}\left(s^2\underbrace{g'^2}_{=g^2}+T^2g^2+2sT\underbrace{g'g}_{=g^2\cos\chi}\right)\right)\\
&= -i_1V^2-g^2\left(i_2-\frac{M_1M_2}{i_1}\left(s^2+T^2+2sT\cos\chi\right)\right)\\
&= -i_1V^2-j_1g^2,
\end{aligned}$$

donc :

$$L_1(\chi)=\int d^3V\, e^{-i_1V^2-j_1g^2}\,W_1'^2W_1^2.$$

Écrivons W_1^2 et $W_1'^2$ de (3) en termes de V donné par (4) : Soit

$$V_1=\frac{M_1}{i_1}(sg'+Tg)-g'$$
$$V_2=\frac{M_1}{i_1}(sg'+Tg)-g,$$

alors : (p. 150)

$$\begin{aligned}
W_1' &= \sqrt{M_1}\,W_0-\sqrt{M_2}\,g'\\
&= \sqrt{M_1}\left(V+\sqrt{M_1M_2}/i_1(sg'+Tg)\right)-\sqrt{M_2}\left(-V_1+M_1/i_1(sg'+Tg)\right)\\
&= \sqrt{M_1}\,V+\sqrt{M_1}\sqrt{M_1M_2}\frac{1}{i_1}(sg'+Tg)+\sqrt{M_2}\,V_1-\sqrt{M_2}\,M_1\frac{1}{i_1}(sg'+Tg)\\
&= \sqrt{M_1}\,V+\sqrt{M_2}\,V_1+M_1\sqrt{M_2}\,i_1^{-1}(sg'+Tg)-M_1\sqrt{M_2}\,i_1^{-1}(sg'+Tg)\\
&= \sqrt{M_1}\,V+\sqrt{M_2}\,V_1
\end{aligned}$$

$$W_1=\sqrt{M_1}\,W_0-\sqrt{M_2}\,g=\dots=\sqrt{M_1}\,V+\sqrt{M_2}\,V_2,$$

ainsi :

$$W_1'^2 = M_1V^2+M_2V_1^2+2\sqrt{M_1M_2}\,VV_1$$
$$W_1^2 = M_1V^2+M_2V_2^2+2\sqrt{M_1M_2}\,VV_2,$$

donc :

$$\begin{aligned}
W_1'^2W_1^2 &= \left(M_1V^2+M_2V_1^2+2\sqrt{M_1M_2}\,VV_1\right)\left(M_1V^2+M_2V_2^2+2\sqrt{M_1M_2}\,VV_2\right)\\
&= \underline{M_1^2V^4}+\underline{M_1M_2V^2V_2^2}+\underline{2\sqrt{M_1M_2}\,M_1V^2(V\cdot V_2)}+\underline{M_2M_1V^2V_1^2}+M_2^2V_1^2V_2^2\\
&\quad +\underline{2\sqrt{M_1M_2}\,M_2V_1^2(VV_2)}+\underline{2\sqrt{M_1M_2}\,M_1V^2(VV_1)}+2\sqrt{M_1M_2}\,M_2(VV_1)V_2^2+4M_1M_2(VV_1)(VV_2)
\end{aligned}$$

$$= M_1^2 V^4 + 2\sqrt{M_1M_2}\, M_1 \cancel{V^2\, V\cdot(V_1+V_2)}^{\,O(V^3)} + V^2 M_1M_2 (V_1^2+V_2^2) + 2\sqrt{M_1M_2}\, M_2 \left(\cancel{V_1^2(V\cdot V_2) + V_2^2(V\cdot V_1)}^{\,O(V)}\right)$$
$$+ 4M_1M_2 (V\cdot V_1)(V\cdot V_2) + M_2^2 V_1^2 V_2^2.$$

Comme ce terme va être intégré avec une mesure gaussienne en V, on peut laisser tomber tous les termes d'ordre impair en V, de sorte que :

$$W_1'^2 W_1^2 = M_1^2 V^4 + V^2 M_1M_2(V_1^2+V_2^2) + 4M_1M_2(V\cdot V_1)(V\cdot V_2) + M_2^2 V_1^2 V_2^2 + O(V^k, k \text{ impair})$$

On a donc :

$$I_1(x) = e^{-j_1g^2}\int d^3V\, e^{-i_1V^2} M_1^2 V^4 + e^{-j_1g^2}\int d^3V\, e^{-i_1V^2} M_1M_2 (V_1^2+V_2^2)\, V^2 + e^{-j_1g^2}\int d^3V\, e^{-i_1V^2}\, 4M_1M_2(V\cdot V_1)(V\cdot V_2)$$
$$+ e^{-j_1g^2}\int d^3V\, e^{-i_1V^2} M_2^2 V_1^2 V_2^2$$

$$= M_1^2 e^{-j_1g^2}\, 4\pi \underbrace{\int_0^\infty dv\, e^{-i_1v^2} v^6}_{=\frac{1}{2} i_1^{-7/2}\frac{3\cdot 5}{2^3}\sqrt{\pi}} + M_1M_2(V_1^2+V_2^2)\, e^{-j_1g^2}\, 4\pi \underbrace{\int_0^\infty dv\, e^{-i_1v^2} v^4}_{=\frac{1}{2} i_1^{-5/2}\frac{3}{2^2}\sqrt{\pi}}$$

$$+ 4M_1M_2\, e^{-j_1g^2} \int d^3V\, e^{-i_1V^2}(V\cdot V_1)(V\cdot V_2) + M_2^2 V_1^2 V_2^2\, e^{-j_1g^2}\, 4\pi \underbrace{\int_0^\infty dv\, e^{-i_1v^2} v^2}_{=\frac{1}{2} i_1^{-3/2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}$$

$$\int d^3V\, e^{-i_1V^2}(V\cdot V_1)(V\cdot V_2) = \sum_{i,j=1}^{3} V_{1i}V_{2j}\int d^3V\, e^{-i_1V^2} V_iV_j$$
$$= \sum_{i=1}^{3} V_{1i}V_{2i}\int d^3V\, e^{-i_1V^2} V_iV_i$$
$$= (V_1\cdot V_2)\,\frac{\pi^{3/2}}{2}\, i_1^{-5/2}$$

$$= e^{-j_1g^2}\Big(M_1^2 \cancel{4}\pi^{3/2} \cancel{\tfrac{1}{2}}\, i_1^{-7/2}\frac{3\cdot 5}{2^{\cancel{3}\,2}}\cancel{\sqrt{\pi}} + M_1M_2(V_1^2+V_2^2)\,\cancel{4}\pi^{3/2}\tfrac{1}{2}\, i_1^{-5/2}\frac{3}{\cancel{2^2}}\cancel{\sqrt{\pi}} + \cancel{4}\,2M_1M_2(V_1\cdot V_2)\frac{\pi^{3/2}}{\cancel{2}}\, i_1^{-5/2}$$
$$+ M_2^2 V_1^2V_2^2\, \cancel{4}\pi^{3/2}\cancel{\tfrac{1}{4}}\, i_1^{-3/2}\cancel{\sqrt{\pi}}\Big)$$

$$= \pi^{3/2} e^{-j_1g^2} i_1^{-7/2}\left(M_1^2\frac{3\cdot 5}{2^2} + M_1M_2(V_1^2+V_2^2)\frac{3}{2}\, i_1 + 2M_1M_2(V_1\cdot V_2)\, i_1 + M_2^2V_1^2V_2^2\, i_1^2\right)$$

$$= M_1M_2\,\pi^{3/2} e^{-j_1g^2} i_1^{-7/2}\left(\frac{M_1}{M_2}\frac{3\cdot 5}{2^2} + i_1\left(\tfrac{3}{2}(V_1^2+V_2^2) + 2(V_1\cdot V_2)\right) + i_1^2\frac{M_2}{M_1}V_1^2V_2^2\right) \checkmark$$

On doit encore exprimer V_1 et V_2 en terme de g. On a

$$V_1\cdot V_2 = \left(\frac{M_1}{i_1}(Sg'+Tg) - g'\right)\left(\frac{M_1}{i_1}(Sg'+Tg) - g\right)$$

$$= \frac{M_1^2}{i_1^2}(Sg'+Tg)^2 - g\frac{M_1}{i_1}(Sg'+Tg) - g'\frac{M_1}{i_1}(Sg'+Tg) + gg' \qquad , gg' = g^2\cos x$$

$$= \frac{M_1^2}{i_1^2}(S^2+T^2+2ST\underset{\cos x}{})g^2 + \frac{M_1}{i_1}\underbrace{(Sg'+Tg)(-g-g')}_{} + g^2\cos x$$
$$= -(Sg'g + Sg'^2 + Tg^2 + Tgg')$$
$$= -(Sg^2\cos x + Sg^2 + Tg^2 + Tg^2\cos x)$$
$$= -g^2\big((S+T)\cos x + S+T\big)$$

$$= \frac{M_1^2}{i_1^2}g^2(S^2+T^2+2ST\underset{\cos x}{}) - g^2\frac{M_1}{i_1}(S+T)(1+\cos x) + g^2\cos x$$

$$= \frac{g^2}{i_1}\left(\frac{M_1^2}{i_1}(S^2+T^2+2ST\cos x) - M_1(S+T)(1+\cos x) + i_1\cos x\right) \qquad , i_1 = 1+M_1(S+T) \checkmark$$

$$= \frac{g^2}{i_1}\left(\frac{M_1^2}{i_1}(S^2+T^2+2ST\cos x) - M_1(S+T) - \cancel{M_1(S+T)\cos x} + \cancel{M_1(S+T)}\cos x + \cos x\right)$$

$$= \frac{g^2}{i_1}\left(\frac{M_1M_1}{i_1}(S^2+T^2+2ST\cos x) - M_1(S+T) - 1 + 1 + \cos x\right) \checkmark$$

On se place déjà dans le cas $M_1 = M_2$, celui qui nous intéresse. Ainsi on a $(i_1 = i_2)$

$$V_1\cdot V_2 = \frac{g^2}{i_1}\Bigg(-\underbrace{\Big(\underbrace{M_2(S+T)+1}_{=i_2} - \frac{M_1M_2}{i_1}(S^2+T^2+2ST\cos x)\Big)}_{=j_1} + 1 + \cos x\Bigg)$$

$$= \frac{g^2}{i_1}(1 - j_1 + \cos x) \checkmark$$

Ainsi:

$$|v_1\wedge v_2|^2 = v_1^2v_2^2 - (v_1\cdot v_2)^2$$

avec:

$$v_1\wedge v_2 = \left(\frac{M_1}{c_1}(Sg'+Tg) - g'\right)\wedge\left(\frac{M_1}{c_1}(Sg'+Tg) - g\right)$$

$$= 0 - \frac{M_1}{c_1}(Sg'+Tg)\wedge g - \frac{M_1}{c_1}\underbrace{g'\wedge(Sg'+Tg)}_{=-(Sg'+Tg)\wedge g'} + g'\wedge g$$

$$= -\frac{M_1}{c_1}Sg'\wedge g + \frac{M_1}{c_1}Tg'\wedge g + g'\wedge g$$

$$= g\wedge g'\left(-1+\frac{M_1S}{c_1}+\frac{M_1T}{c_1}\right)$$

$$= g\wedge g'\,(\underbrace{M_1(S+T)+1}_{=c_1} - 1 - c_1)$$

$$= -g^2\sin x/c_1,$$

donc

$$\frac{1}{c_1^2}g^4\sin^2x = v_1^2v_2^2 - \frac{g^4}{c_1^2}(1-j_1+\cos x)^2$$

$$\Rightarrow v_1^2v_2^2 = \frac{g^4}{c_1^2}\left(\sin^2x + (1-j_1+\cos x)^2\right) = \frac{g^4}{c_1^2}\left(\sin^2x + (1-j_1)^2 + \cos^2x + 2\cos x(1-j_1)\right)$$

$=1$

$$= \frac{g^4}{c_1^2}\left(2+2\cos x - 2\cos x\, j_1 - 2j_1 + j_1^2\right)$$

V $\boxed{\text{Ok jusqu'ici}}$

Ainsi: suite : voir $\boxed{\text{correction p.3}}$

$$L_1(x) = M_1M_2\pi^{3/2}e^{-j_1g^2}c_1^{-7/2}\left(\frac{15}{4}\frac{M_1}{M_2} + c_1\left(\frac32(v_1^2+v_2^2) + 2\frac{g^2}{c_1}(1-j_1+\cos x)\right) + c_1^2\frac{M_2}{M_1}g^4\left(\sin^2x + \frac{(1-j_1+\cos x)^2}{c_1^2}\right)\right)$$

$$= M_1M_2\pi^{3/2}e^{-j_1g^2}c_1^{-7/2}\left(\frac{15}{4}\frac{M_1}{M_2} + \frac32 c_1(v_1^2+v_2^2) + 2g^2(1-j_1+\cos x) + c_1^2\frac{M_2}{M_1}g^4\sin^2x + \frac{M_2}{M_1}g^4(1-j_1+\cos x)^2\right)$$

On pose dorénavant $M_1=M_2=M$, ainsi:

$$L_1(x) = M^2\pi^{3/2}e^{-j_1g^2}c_1^{-7/2}\left(\frac{15}{4} + \frac32 c_1(v_1^2+v_2^2) + 2g^2(1-j_1+\cos x) + c_1^2g^4\sin^2x + g^4(1-j_1+\cos x)^2\right)$$

Il faut encore calculer $v_1^2+v_2^2$:

$$v_1^2+v_2^2 = a^2+g'^2-2ag'+a^2+g^2-2ag$$

$$= 2\frac{M_1^2}{c_1^2}(Sg'+Tg)^2 + g^2 \qquad - 2a(g+g') + g^2$$

$$= 2\frac{M_1^2}{c_1^2}g^2(S^2+T^2+2ST\cos x) + 2g^2 - 2\frac{M_1}{c_1}(Sg'+Tg)(g+g')$$

$$= 2\frac{M_1^2}{c_1^2}g^2(S^2+T^2+2ST\cos x) + 2g^2 - 2\frac{M_1}{c_1}\Big(\underbrace{Sg'g+Sg'^2+Tg^2+Tgg'}_{=g^2(S\cos x+S+T+T\cos x)}\Big)$$

$$= 2\frac{M_1^2}{c_1^2}g^2(S^2+T^2+2ST\cos x) + 2g^2 - 2g^2\frac{M_1}{c_1}(S+T)(\cos x+1)$$

$$= \frac{2g^2}{c_1}\left(\frac{M_1^2}{c_1}(S^2+T^2+2ST\cos x) + c_1 - M_1(S+T)(\cos x+1)\right)$$

$$= \frac{2g^2}{c_1}\left(\frac{M_1M_1}{c_1}(S^2+T^2+2ST\cos x) - M_1(S+T) + c_1 - M_1(S+T)\cos x\right)$$

$$= \frac{2g^2}{c_1}\left(-\underbrace{\left(M_2(S+T)+1-\frac{M_1M_2}{c_1}(S^2+T^2+2ST\cos x)\right)}_{=j_1} + 1 + c_1 - M_1(S+T)\cos x\right)$$

$$= \frac{2g^2}{c_1}\left(-j_1+1-M_1(S+T)\cos x+c_1\right)$$

$$= \frac{2g^2}{c_1}\left(1-j_1-M_1(S+T)\cos x\right) + 2g^2$$

Ainsi on a:

$$L_1(x) = M_1M_2\pi^{3/2}e^{-j_1g^2}c_1^{-7/2}\Big(\frac{15}{4} + \frac{3}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}g^2(1-j_1-M_1(S+T)\cos x) + \frac{3}{\cancel{2}}c_1\cancel{2}g^2 + 2g^2(1-j_1+\cos x)$$
$$+ c_1^2g^4\sin^2x + g^4(1-j_1+\cos x)^2\Big)$$

$$= M_1M_2\pi^{3/2}e^{-j_1g^2}c_1^{-7/2}\Big(\frac{15}{4} + 3g^2 - 3g^2j_1 - 3g^2M_1(S+T)\cos x + 3c_1g^2 + 2g^2 - 2g^2j_1 + 2g^2\cos x$$
$$+ c_1^2g^4\sin^2x + g^4(1-j_1+\cos x)^2\Big)$$

$$= M_1M_2\pi^{3/2}e^{-j_1g^2}c_1^{-7/2}\Big(\frac{15}{4} + 5g^2 - 5g^2j_1 + g^2\cos x\,(2-3M_1(S+T)) + 3c_1g^2 + c_1^2g^4\sin^2x$$
$$+ g^4\underbrace{\left((1-j_1)^2+\cos^2x+2\cos x(1-j_1)\right)}_{=1+j_1^2-2j_1+\cos^2x+2\cos x-2\cos x\,j_1}\Big)$$

$$L_1(\chi) = M_1 M_2\, \pi^{3/2} e^{-j_1 g^2} i_1^{-7/2} \Big(\frac{15}{4} + 5g^2 - 5g^2 j_1 + g^2 \cos\chi\,(2-3M_1(s+T)) + 3 i_1 g^2 + i_1^2 g^4 \sin^2\chi + g^4 + g^4 j_1^2 - 2g^4 j_1 + g^4\cos^2\chi + 2g^4\cos\chi - 2g^4 j_1 \cos\chi \Big)$$

On peut montrer qu'on peut réécrire

$$i_1 = \frac{1 - M_2(S+T) + (M_2-M_1)ST}{(1-S)(1-T)}$$

$$j_1 = \frac{1 - st\,(M_1^2 + M_2^2 + 2M_1M_2\cos\chi)}{1 - M_2(s+t) + (M_2-M_1)st}$$

d'où en définissant

$$z_1 = st\,(M_1^2 + M_2^2 + 2M_1M_2\cos\chi)$$
$$Y_1 = M_2(s+t) - (M_2-M_1)st$$

on a les relations similaires que lors du calcul précédent :

$$\frac{i_1}{ST} = \frac{1-Y_1}{st} \quad ; \quad j_1 = \frac{1-z_1}{1-Y_1} \quad ; \quad \frac{\partial j_1}{\partial Y_1} = \frac{j_1}{1-Y_1}$$

donc les lemmes utilisés pour la mise en évidence des polynômes de Sonine restent valables. Étudions la fonction

$$G_1(\chi) := \left(\frac{ST}{st}\right)^{7/2} \frac{1}{\pi^3} L_1(\chi)$$

$$= \left(\frac{ST}{i_1}\right)^{7/2} \frac{1}{(St)^{7/2}} = \left(\frac{St}{1-Y_1}\right)^{7/2} \frac{1}{(St)^{7/2}} = \frac{1}{(1-Y_1)^{7/2}}$$

alors

$$G_1(\chi) = \frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}} \left(\frac{ST}{st}\right)^{7/2} e^{-j_1 g^2} i_1^{-7/2} \Big(\frac{15}{4} + 5g^2 - 5g^2 j_1 + g^2\cos\chi\,(2-3M_1(s+T)) + 3 i_1 g^2 + i_1^2 g^4 \sin^2\chi + g^4 + g^4 j_1^2 - 2g^4 j_1 + g^4 \cos^2\chi + 2g^4\cos\chi - 2g^4 j_1\cos\chi \Big)$$

et :

$$[S_{5/2}^{(p)}(W_2^2)W_2^2, S_{5/2}^{(q)}(W_1^2)W_1^2]_{12} = \underset{\text{de}}{\overset{\text{coeff.}}{\text{de } S^p t^q}} \left\{ \int d^3g\, d\varepsilon\, db\; g\, b\, (G_1(0) - G_1(\chi)) \right\}, \tag{1}$$

avec le second membre de (1) qui est développé en puissances de s et t. Il faut exprimer $G_1(\chi)$ en terme de polynômes de Sonine avec le lemme. On a :

$$G_1(\chi) = \frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}} \frac{1}{(1-Y_1)^{7/2}} e^{-j_1 g^2} \Big(\frac{15}{4} + 5g^2 - 5g^2 j_1 + g^2\cos\chi\,(2-3M_1(S+T)) + 3 i_1 g^2 + i_1^2 g^4 \sin^2\chi + g^4 + g^4 j_1^2 - 2g^4 j_1 + g^4\cos^2\chi + 2g^4\cos\chi - 2g^4 j_1\cos\chi \Big) \quad ; \; i_1 = (1-Y_1)\frac{ST}{st}$$

$$= \frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}} \frac{1}{(1-Y_1)^{7/2}} e^{-j_1 g^2} \Big(\frac{15}{4} + 5g^2 - 5g^2 j_1 + g^2\cos\chi\,(2-3M_1(S+T)) + g^4 + g^4 j_1^2 - 2g^4 j_1 + g^4\cos^2\chi + 2g^4\cos\chi - 2g^4 j_1\cos\chi \Big)$$

$$+ \underbrace{\frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}} \frac{1}{(1-Y_1)^{7/2}} e^{-j_1 g^2}\, 3g^2\, (1-Y_1)\frac{ST}{st}}_{= \frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}} 3g^2 \frac{ST}{st} E_0(5)} + \underbrace{\frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}} \frac{1}{(1-Y_1)^{7/2}} e^{-j_1 g^2}\, g^4 \sin^2\chi\, (1-Y_1)^2 \left(\frac{ST}{st}\right)^2}_{= \frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}} g^4 \sin^2\chi \left(\frac{ST}{st}\right)^2 E_0(3)}$$

$$= \underbrace{\frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}} \frac{1}{(1-Y_1)^{7/2}} e^{-j_1 g^2} \Big(\frac{15}{4} + j_1^2 g^4 - 9 g^2 j_1 \Big)}_{= E_2(7)}$$

$$+ \frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}} \frac{1}{(1-Y_1)^{7/2}} e^{-j_1 g^2} \Big(4g^2 j_1 + 5g^2 + g^2\cos\chi\,(2-3M_1(S+T)) + g^4 - 2g^4 j_1 + g^4\cos^2\chi + 2g^4\cos\chi - 2g^4 j_1 \cos\chi \Big)$$

$$+ \frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}} \Big(3g^2 \frac{ST}{st} E_0(5) + g^4 \sin^2\chi \left(\frac{ST}{st}\right)^2 E_0(3) \Big)$$

$$= \frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}} \Big(3g^2 \frac{ST}{st} E_0(5) + g^4 \sin^2\chi \left(\frac{ST}{st}\right)^2 E_0(3) + E_2(7) \Big)$$

$$- 4 \underbrace{\frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}} \frac{1}{(1-Y_1)^{7/2}} e^{-j_1 g^2} \Big(\frac{5}{2} - j_1 g^2 \Big)}_{= E_1(7)}$$

$$+ \frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}} \frac{1}{(1-Y_1)^{7/2}} e^{-j_1 g^2} \Big(\underbrace{10}_{\to 10 E_0(7)} + 5g^2 + g^2\cos\chi\,(2-3M_1(S+T)) + g^4 - 2g^4 j_1 + g^4 \cos^2\chi + 2g^4\cos\chi - 2g^4 j_1 \cos\chi \Big)$$

$$= \frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}} \Big(3g^2 \frac{ST}{st} E_0(5) + g^4 \sin^2\chi \left(\frac{ST}{st}\right)^2 E_0(3) + E_2(7) - 4E_1(7) + 10 E_0(7) \Big)$$

$$+ g^2 \frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}} \frac{1}{(1-Y_1)^{7/2}} e^{-j_1 g^2} \Big(5 + \cos\chi\,(2-3M_1(S+T)) + \underbrace{g^2 - 2g^2 j_1 + g^2\cos^2\chi}_{\to E_0(7)} + 2g^2\cos\chi - 2g^2 j_1 \cos\chi \Big)$$

$$= \frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}}\left(3g^2 \frac{\delta T}{\delta t} E_0(5) + g^4 \sin^2\chi \left(\frac{\delta T}{\delta t}\right)^2 E_0(3) + E_2(7) - 4E_1(7) + 10 E_0(7)\right)$$

$$+2 g^2 \frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}} \underbrace{\frac{1}{(1-Y_1)^{7/2}} e^{-j_1 g^2}\left(\frac{5}{2} - j_1 g^2\right)}_{=E_1(7)}$$

$$+ g^4 \frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}} \underbrace{\frac{1}{(1-Y_1)^{7/2}} e^{-j_1 g^2}}_{=E_0(7)} \left(1+\cos^2\chi + 2\cos\chi\right)$$

$$+ g^2\cos\chi \frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}} \frac{1}{(1-Y_1)^{7/2}} e^{-j_1g^2}\left(\underbrace{2 - 3M_1(\delta+T) - 2j_1g^2}\right)$$

$$= \underbrace{2\left(\frac{5}{2} - j_1g^2\right)}_{\to E_1(7)} \underbrace{- 3 - 3M_1(\delta+T)}_{\to E_0(7)}$$

$$= \frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}}\Big(3g^2 \frac{\delta T}{\delta t}E_0(5) + g^4\sin^2\chi\left(\frac{\delta T}{\delta t}\right)^2 E_0(3) + E_2(7) - 4E_1(7) + 10E_0(7) + 2g^2E_1(7)$$
$$+ g^4(1+\cos^2\chi+2\cos\chi)E_0(7) + g^2\cos\chi\, 2E_1(7) - 3(1+M_1(\delta+T))\, g^2\cos\chi\, E_0(7)\Big)$$

$$= \frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}}\Big(3g^2 \frac{\delta T}{\delta t}E_0(5) + g^4\sin^2\chi\left(\frac{\delta T}{\delta t}\right)^2 E_0(3) + E_2(7) + E_1(7)\left(-4+2g^2+2g^2\cos\chi\right)$$
$$+ E_0(7)\left(10 + g^4(1+\cos^2\chi+2\cos\chi) - 3(1+M_1(\delta+T))\, g^2\cos\chi\right)\Big)$$

$$= \frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}}\Big(3g^2 \frac{\delta T}{\delta t}E_0(5) + g^4\sin^2\chi\left(\frac{\delta T}{\delta t}\right)^2 E_0(3) + E_2(7) + 2E_1(7)\left(g^2(\cos\chi+1)-2\right)$$
$$+ E_0(7)\left(10 + g^4(1+\cos^2\chi+2\cos\chi) - 3(1+M_1(\delta+T))\, g^2\cos\chi\right)\Big)$$

Remplace l'expression des polynômes de Sonine:

$$G_1(\chi) = \frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}} e^{-g^2}\sum_{r,n\geq 0}\frac{(Z_1g^2)^r}{r!}Y_1^n\Big(3g^2 \overset{\to 1}{\frac{\delta T}{\delta t}} S^{(n)}_{r+\frac{3}{2}}(g^2) + g^4\sin^2\chi\overset{\to 1}{\left(\frac{\delta T}{\delta t}\right)^2} S^{(n)}_{r+\frac{1}{2}}(g^2) + S^{(n+2)}_{r+\frac{1}{2}}(g^2)(n+2)(n+1)$$
$$+ 2\left(g^2(\cos\chi+1)-2\right)(n+1)\, S^{(n+1)}_{r+\frac{3}{2}}(g^2) + S^{(n)}_{r+5/2}(g^2)\left(10+g^4(1+\cos^2\chi+2\cos\chi) - 3(1+\cancel{M_1(\delta+T)})\, g^2\cos\chi\right)\Big)$$

avec à l'ordre le plus bas:

$$\frac{\delta T}{\delta t} = 1 + \ldots$$
$$\delta = s + \ldots$$
$$T = t + \ldots$$

et: $r = n = 0$ car $Z_1 = O(st)$ et $Y_1 = O(st)$, ainsi, avec $S^{(0)}_n(x) = 1 \ \forall x$:

$$G_1(\chi) = \frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}}e^{-g^2}\Big(3g^2 + g^4\sin^2\chi + 2S^{(2)}_{1/2}(g^2) + 2\left(g^2(\cos\chi+1)-2\right)S^{(1)}_{3/2}(g^2)$$
$$+ 10 + g^4(1+\cos^2\chi+2\cos\chi) - 3g^2\cos\chi\Big),$$

avec

$$S_\ell^{(1)}(x) = \ell+1-x \Rightarrow S^{(1)}_{3/2}(g^2) = \frac{5}{2} - g^2$$
$$S_\ell^{(2)}(x) = \tfrac{1}{2}(\ell+1)(\ell+2) - (\ell+2)x + \tfrac{1}{2} x^2 \Rightarrow S^{(2)}_{1/2}(g^2) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}+1\right)\left(\tfrac{1}{2}+2\right) - \left(\tfrac{1}{2}+2\right)g^2 + \tfrac{1}{2} g^4,$$

donc

$$G_1(\chi) = \frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}}e^{-g^2}\Big(3g^2 + g^4\sin^2\chi + 2\,\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2} - 2\,\frac{5}{2}g^2 + g^4 + 2\left(g^2(\cos\chi+1)-2\right)\left(\frac{5}{2}-g^2\right)$$
$$+ 10 + g^4 + g^4\cos^2\chi + 2g^4\cos\chi\Big) \qquad \left(g^4\sin^2\chi + g^4\cos^2\chi = 1\cdot g^4\right)$$

$$= \frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}}e^{-g^2}\Big(3g^2 + 2g^4 + \frac{15}{2} - 5g^2 + g^4 + 5\left(g^2(\cos\chi+1)-2\right) - g^2\, 2\left(g^2(\cos\chi+1)-2\right)$$
$$+ \frac{20}{2} + 2g^4\cos\chi\Big)$$

$$= \frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}}e^{-g^2}\Big(-2g^2 + 3g^4 + \frac{35}{2} + 2g^4\cos\chi + 5g^2(\cos\chi+1) - 10 - 2g^4(\cos\chi+1) + 4g^2\Big)$$

$$= \frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}}e^{-g^2}\Big(2g^2 + \frac{15}{2} + 3g^4 + \cancel{2g^4\cos\chi} + 5g^2\cos\chi + 5g^2 - \cancel{2g^4\cos\chi} - 2g^4\Big)$$

$$= \frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}}e^{-g^2}\Big(\frac{15}{2} + 7g^2 + g^4 + 5g^2\cos\chi\Big)$$

$$= \frac{M_1M_2}{\pi^{3/2}}e^{-g^2}\sum_{pqr\ell\geq 0} A_{pqr\ell}\,(M_1 s)^p(M_2 t)^q g^{2r}\cos^\ell\chi$$

avec les coefficients :

$$\begin{cases} A_{0000} = 15/2 \\ A_{0010} = 7 \\ A_{0020} = \cancel{1}\ 1 \\ A_{0011} = \cancel{8}\ 2 \end{cases}$$

La solution s'écrit donc

$$[S_{5/2}^{(p)}(W_1^2)W_1^2, S_{5/2}^{(q)}(W_4^2)W_4^2]_{12} = \frac{1}{s^p t^q}\frac{M_1 M_2}{\pi^{3/2}}\int d^3g\, dz\, db\ g\, b\ e^{-g^2}\sum_{r\ell\geq 0} A_{pqr\ell}(M_1 s)^p (M_2 t)^q g^{2r}(1-\cos^\ell\chi) + O(s^k t^\ell,\ k\neq p,\ \ell\neq q)$$

$$= \frac{M_1^{p+1} M_2^{q+1}}{\pi^{3/2}}\sum_{r\ell\geq 0}\int d^3g\, dz\, db\ g\, b\ e^{-g^2} A_{pqr\ell}\ g^{2r}(1-\cos^\ell\chi)$$

$$= \frac{M_1^{p+1} M_2^{q+1}}{\pi^{3/2}}\sum_{r\ell\geq 0} A_{pqr\ell}\int d^3g\, dz\, db\ g\, b\ e^{-g^2} g^{2r}(1-\cos^\ell\chi)\quad ,\ d^3g = 4\pi g^2 dg,\ z = [0, 2\pi]$$

$$= \frac{M_1^{p+1} M_2^{q+1}}{\pi^{3/2}}\sum_{r\ell\geq 0} A_{pqr\ell}\ 4\pi\ 2\pi\int_0^\infty dg\, db\ g\, b\ e^{-g^2} g^{2r}(1-\cos^\ell\chi)$$

$$= 8 M_1^{p+1} M_2^{q+1}\sum_{r\ell\geq 0} A_{pqr\ell}\ \underbrace{\sqrt{\pi}\int_0^\infty dg\, db\ g\, b\ e^{-g^2} g^{2r}(1-\cos^\ell\chi)}_{=\Omega_1^{(\ell)}(r)}$$

$$= 8 M_1^{p+1} M_2^{q+1}\sum_{r,\ell\geq 0} A_{pqr\ell}\,\Omega_1^{(\ell)}(r)$$

En particulier dans le cas qui nous intéresse $p=q=0$:

$$[S_{5/2}^{(0)}(W_1^2)W_1^2, S_{5/2}^{(0)}(W_4^2)W_4^2]_{12} = 2\sum_{r\ell\geq 0} A_{00r\ell}\,\Omega_1^{(\ell)}(r)$$

$$= 2\cdot\left(A_{0000}\,\cancel{\Omega_1^{(0)}(0)}^{=0} + A_{0010}\,\cancel{\Omega_1^{(0)}(1)}^{=0} + A_{0020}\,\cancel{\Omega_1^{(0)}(1)}^{=0} + A_{0011}\,\Omega_1^{(1)}(1)\right)$$

$$= 2\, A_{0011}\,\Omega_1^{(1)}(1)$$

$$= \cancel{16}\ 4\,\Omega_1^{(1)}(1)$$

On avait trouvé lors du calcul précédent :

$$[S_{5/2}^{(0)}(W_1^2)W_1^2, S_{5/2}^{(0)}(W_2^2)W_2^2]_{12} = -4\,\Omega_1^{(1)}(1),$$

donc comme

$$[S_{5/2}^{(0)}(W_1^2)W_1^2, S_{5/2}^{(0)}(W_1^2)W_1^2]_1 = [S_{5/2}^{(0)}(W_1^2)W_1^2, S_{5/2}^{(0)}(W_1^2)W_1^2]_{12} + [S_{5/2}^{(0)}(W_1^2)W_1^2, S_{5/2}^{(0)}(W_2^2)W_2^2]_{12},$$

alors :

$$[S_{5/2}^{(0)}(W_1^2)W_1^2, S_{5/2}^{(0)}(W_1^2)W_1^2]_1 = \cancel{6\,\Omega_1^{(1)}(1)}\quad 0$$

$$= \cancel{6\cdot\frac{3}{8}\pi A_1(5)\sqrt{\frac{2k}{m}}}\quad 0$$

Le coefficient C_0 est alors :

$$C_0 = \rho_0 b_{00}^{-1} = \frac{15}{4}\ \frac{1}{6}\frac{8}{3}\ \frac{1}{\pi}\ \frac{1}{A_1(5)}\sqrt{\frac{m}{2k}} = \frac{15}{9}\ \frac{1}{\pi}\ \frac{1}{A_1(5)}\sqrt{\frac{m}{2k}} = \cancel{\frac{5}{3}\frac{1}{\pi}\frac{1}{A_1(5)}\sqrt{\frac{m}{2k}}}\quad 0$$

Les coefficients de viscosité sont donc :

$$\mathcal{Y}_n^{(1)}(r,t) = -\frac{5}{3}k_B T\ \frac{5}{3}\ \frac{1}{\pi}\ \frac{1}{A_1(5)}\sqrt{\frac{m}{2k}} = -\frac{25}{9}k_B T\ \frac{1}{\pi}\ \frac{1}{A_1(5)}\sqrt{\frac{2m}{k}}\ \frac{1}{2} = \cancel{-\frac{25}{18}\frac{1}{\pi}k_B T\frac{1}{A_1(5)}\sqrt{\frac{2m}{k}}}\quad 0$$

$$\mathcal{Y}_e^{(1)}(r,t) = -\frac{5}{2}k_B\ \frac{\nabla_r T\cdot V}{\nabla_r V}\ \frac{5}{3}\ \frac{1}{\pi}\ \frac{1}{A_1(5)}\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2m}{k}} = \cancel{-\frac{25}{12}\frac{1}{\pi}\frac{1}{A_1(5)}k_B\frac{\nabla_r T\cdot V}{\nabla_r V}\sqrt{\frac{2m}{k}}}\quad 0$$

Mon problème : nomenclature : Chapman ~~plus tout à fait important~~ (1)

- comment déterminer les valeurs des coefficients c_1 et d_0 ? Utilise-t-on les valeurs propres de l'opérateur de collision ?

- réponse : dans le Chapman - Cowling :

(7.51.1) $$A(S) = \sum_{p=1}^{\infty} a_p \, S_{3/2}^{(p)}(S^2) \quad , \quad S = \sqrt{\frac{m}{2kT}}\,\underbrace{(c - c_1)}_{=u-c \ (\text{i.e. } p-mv)}$$

(7.51.2) $$\mathbf{A} = A(S)\cdot \mathbf{S} = \sum_{p=1}^{\infty} a_p \, \mathbf{a}^{(p)} \quad ; \quad \mathbf{a}^{(p)} = S_{3/2}^{(p)}(S^2)\cdot \mathbf{S}$$ (7.51.3)

Équation à résoudre

$$n I(A) = f^{(0)}\left(S^2 - \tfrac{5}{2}\right)S \quad \Longrightarrow \quad n I(A) = -f^{(0)} S_{3/2}^{(1)}(S^2)\cdot S$$ (7.51.4)

que l'on multiplie par $a^{(q)} = S_{3/2}^{(q)} \cdot S$ puis intègre sur $\int dc_1$:

ce I contient $f^{(0)}$

$$\underbrace{\int dc_1\, n\, I(A)\, a^{(q)}}_{\overset{(4.47)}{=}\, n\cdot[A, a^{(q)}]} = \underbrace{-\int dc_1\, f^{(0)} S_{3/2}^{(1)}(S^2)\cdot S \cdot S_{3/2}^{(q)}(S^2)\cdot S}_{\overset{(7.3.5)}{=}\, -n \underbrace{\int dc_1 \frac{1}{\pi^{3/2}} e^{-S^2} S_{3/2}^{(1)}(S^2)\, S\, S_{3/2}^{(q)}(S^2)\, S}_{\text{connu : relation d'orthonormalité}}}$$

par l'écriture générale

$[F,G] := \int dc_1\, G\, I(F)$

$$\Longrightarrow \quad [A, a^{(q)}] = \underbrace{-\frac{15}{4}\delta_{q,1}}_{:=\alpha_q}$$ ⊛

Soit : $a_{pq} := [a^{(p)}, a^{(q)}]$ qui est le terme difficile à calculer car contient toujours les valeurs propres, alors

$$[A, a^{(q)}] = \left[\sum_{p\geq 1} a_p\, a^{(p)}, a^{(q)}\right] = \sum_{p\geq 1} a_p \underbrace{[a^{(p)}, a^{(q)}]}_{=a_{pq}} = \alpha_q$$

$$\Longrightarrow \boxed{\sum_{p\geq 1} a_p\, a_{pq} = \alpha_q}$$

difficile ! difficile !

Le calcul des a_{pq} est fait dans les chapitres 9 et 10. continuer avec la page (2)
Pour des molécules maxwelliennes, on a a_1 qui est le seul coefficient non nul, donc

$$a_1 a_{1q} = \alpha_q \quad \Longrightarrow \quad a_1 = \frac{\alpha_q}{a_{1q}} \quad , \quad \alpha_q = -\frac{15}{4}\delta_{q,1}$$

$$\Longrightarrow \quad a_1 = \frac{\alpha_1}{a_{11}} \quad , \quad a_{11} = \frac{5kT}{2\mu} \quad , \quad \mu = \frac{1}{3\pi}\sqrt{\frac{2m}{\mathcal{K}}}\,\frac{kT}{A_2(5)}$$ (10.33.6)

$$\Longrightarrow \quad a_1 = -\frac{15}{4}\left(\frac{5}{2}\frac{kT}{\mu}\right)^{-1} = -\frac{3}{2}\frac{\mu}{kT}$$

dans le cas général, μ est donné par :

$$\mu = 5\sqrt{\frac{kTm}{\pi}}\left(\frac{2kT}{\mathcal{K}}\right)^{\frac{2}{\nu-1}} \cdot \frac{1}{8\,\Gamma\left(4 - \frac{2}{\nu-1}\right)}\,\frac{1}{A_2(\nu)} \quad , \quad F = \frac{\mathcal{K}}{r^\nu}$$ (10.32.1)

et $A_2(\nu)$ est tabulé à la page 172 : formule de quadrature. Pour comprendre d'où tout cela vient, il faut suivre en détail les équations mentionnées aux renvois dès la p. 170 le chapitre 10.31. (10.3.5, 9.33.4, etc.) Très gros calculs.

Réponse à la question : OUI.

Avec ce résultat, on a :

$$a_1 = -\frac{\cancel{3}}{2}\frac{1}{\cancel{kT}}\cdot\frac{1}{\cancel{3}\pi}\sqrt{\frac{2m}{\mathcal{K}}}\,\frac{\cancel{kT}}{A_2(5)} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{m}{2\mathcal{K}}}\,\frac{1}{A_2(5)} \quad , \quad A_2(5) = 0.436\ldots$$

La solution est donc :

$$A = +\frac{3}{2}\frac{\mu}{kT}\left(S^2 - \frac{5}{2}\right)S$$

$$\Phi^{(1)} = -\frac{1}{n}\sqrt{\frac{2kT}{m}}\,A\,\frac{\nabla T}{T} - \frac{2}{n}B:\nabla c_0 + \underbrace{\Phi^{(1)}_{\text{ker}}}_{=0} = -\frac{3\mu}{2p}\sqrt{\frac{2kT}{m}}\left(S^2 - \frac{5}{2}\right)S\,\frac{\nabla T}{T} \quad ; \quad p = nkT$$ (10.33.8)

Lien entre cette formulation et le coefficient de conductivité thermique : p.125

$$j_q = \frac{1}{2} m \int dc \underbrace{f^{(1)}}_{= f^{(0)} \Phi^{(1)}} C^2 \cdot C \quad , \; C = p - mv$$

facteur que l'on peut mettre dans A

ce $\sqrt{\frac{2kT}{m}}$ vient de la définition de $A = A(S) \cdot S = \sqrt{\frac{2kT}{m}} C$

$$\Phi^{(1)} = -\frac{1}{n}\sqrt{\frac{2kT}{m}} A \frac{\nabla T}{T} - \frac{2}{n} B : \nabla C_0$$

$$S = \sqrt{\frac{m}{2kT}} C \; ; \; A = A(S) \cdot S$$

$$= -\frac{1}{2} m \int dc \left(\frac{2kT}{m}\right) \sqrt{\frac{2kT}{m}} S^2 \cdot S \frac{1}{n} \sqrt{\frac{2kT}{m}} A \frac{\nabla T}{T} f^{(0)}$$

$$= -\frac{m}{2n}\left(\frac{2kT}{m}\right)^2 \int dc\, f^{(0)} S \cdot S^2 A(S) \cdot S \frac{\nabla T}{T}$$

$$= -\frac{2k^2T}{m \cdot n} \underbrace{\int dc\, f^{(0)} S^2 S A(S) S}_{} \nabla T$$

$$= \int dc\, f^{(0)} S^2 A(S) \sum_{i=1}^{3} S_i^2$$

$$\overset{(1\text{-}42\text{-}4)}{=} \frac{1}{3} \int dc\, f^{(0)} S^2 A(S) S^2$$

$$= -\frac{1}{3} \frac{2k^2T}{m \cdot n} \int dc\, f^{(0)} S^4 A(S) \cdot \nabla T$$

en utilisant une conséquence des invariants de collision $\int dc\, f^{(0)} S^2 A(S) = 0$ on a :

$$j_q = -\frac{2}{3} \frac{k^2T}{mn} \int dc\, f^{(0)} (S^4 \underbrace{- \tfrac{5}{2} S^2}_{\to 0}) A(S) \nabla T$$

$$= -\frac{2}{3} \frac{k^2T}{m \cdot n} \int dc\, S A(S) \underbrace{f^{(0)} (S^2 - \tfrac{5}{2}) S}_{= n I(A)} \nabla T \quad , \quad n I(A) = f^{(0)} (S^2 - \tfrac{5}{2}) S \quad (7.31.2)$$

$$= -\frac{2}{3} \frac{k^2T}{m} \underbrace{\int dc\, A\, I(A)}_{= [A, A]} \nabla T$$

$$= -\lambda \cdot \nabla T$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{2}{3} \frac{k^2T}{m} [A, A]$$

avec le développement $A = \sum_{p \geq 1} a_p \, a^{(p)}$ on a :

$$\lambda = \frac{2}{3} \frac{k^2T}{m} \sum_{p \geq 1} a_p [A \, ; a^{(p)}]$$

$$\overset{⊛}{=} \frac{2}{3} \frac{k^2T}{m} \sum_{p \geq 1} a_p \left(-\frac{15}{4} \delta_{p,1}\right)$$

$$\boxed{\lambda = -\frac{5}{2} \frac{k^2T}{m} a_1} \quad (p.129)$$

Pour des molécules maxwelliennes le coefficient de conductivité thermique est alors :

$$\lambda = -\frac{5}{2} \frac{k^2T}{m} \left(-\frac{3}{2}\right) \frac{\mu}{kT} = \frac{15}{4} \frac{k\mu}{m} = \frac{15}{4} \frac{k}{m} \frac{1}{3\pi} \sqrt{\frac{2m}{\kappa}} \frac{kT}{A_2(5)} = \frac{5}{4\pi} k^2 T \sqrt{\frac{2}{m\kappa}} \frac{1}{A_2(5)} = \frac{5\sqrt{2}}{4\pi} \frac{1}{A_2(5)} \frac{k^2 T}{\sqrt{m\kappa}}$$

$\boxed{OK}$

- Point suivant : reformuler le tout dans mes notations

Calcul de $a_0^{(5)}$ et $b_0^{(5)}$ $\boxed{\text{Première fois}}$

Malgré la similitude, on n'a pas $a_0^{(5)} = b_0$ et $b_0^{(5)} = b_1$. En effet, b_0 est la projection d'une solution de second membre quadratique sur le polynôme de Sonine $S_{5/2}^{(0)}$: la différence est que b_0 ce second membre quadratique est $\overset{\circ}{w w}$ qui est un tenseur de trace nulle, tandis que j'ai $w^2 = \sum_{i=1}^3 w_i^2 = \mathrm{Tr}(ww)$. Par contre, on a $a_0^{(5)} = b_0^{(5)}$: en effet, dans les deux cas il s'agit d'une projection sur w^2, de polynôme de Sonine $S_{5/2}^{(0)} = 1$. Dans le Chapman, b_1 est défini par (le b_1 du Chapman est mon b_0)

$$b_1 = \frac{\beta_1}{b_{11}} ,$$ (je redérive cette relation avec mes notes déjà écrites)

avec (p.159)

$$b_{11} = [S_{5/2}^{(0)} \overset{\circ}{\mathcal{C}_1\mathcal{C}_1}, S_{5/2}^{(0)} \overset{\circ}{\mathcal{C}_1\mathcal{C}_1}]_1 = [\overset{\circ}{\mathcal{C}_1\mathcal{C}_1}, \overset{\circ}{\mathcal{C}_1\mathcal{C}_1}]_1 = 4\,\Omega_1^{(2)}(2)$$

$$\beta_q = \frac{1}{n}\int d^3c\, f^{(0)}\, \overset{\circ}{\mathcal{C}\mathcal{C}} : S_{5/2}^{(q-1)}(\mathcal{C}^2)\, \overset{\circ}{\mathcal{C}\mathcal{C}} = \frac{5}{2}\,\delta_{q,1}$$

$$f^{(0)}dc = \frac{n}{\pi^{3/2}} e^{-\mathcal{C}^2} d\mathcal{C}$$

et à la page 171 :

$$\Omega_{12}^{(\ell)}(r) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi kT}{m_0 M_1 M_2}} \left(\frac{\kappa}{2kT}\right)^{\frac{2}{\nu-1}} A_\ell(\nu)\, \Gamma\left(r+2-\frac{2}{\nu-1}\right) ,$$

avec dans notre cas pour un gaz de molécules maxwelliennes $\nu = 5$, $M_1 = m_1/m_1+m_2$, $M_2 = \frac{m_2}{m_1+m_2}$, et comme $m_1 = m_2 = m$, alors $M_1 = 1/2$ et $M_2 = 1/2$, d'où avec $m_0 = m_1 + m_2 = 2m$

$$\Omega_1^{(\ell)}(r) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi kT\kappa}{2m\frac{1}{2}\frac{1}{2}2kT}}\, A_\ell(5)\,\Gamma\left(\frac{3}{2}+r\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi\kappa}{m}}\, A_\ell(5)\, \underbrace{\Gamma\left(1/2 + r + 1\right)}_{=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{r+1}}(2r+1)!!} \quad ; \quad \Gamma(1/2+n) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}(2n-1)!!$$

$$= \frac{\pi}{2^{r+2}}(2r+1)!!\sqrt{\frac{2\kappa}{m}}\, A_\ell(5)$$

avec $A_1(5)$ et $A_2(5)$ des valeurs numériques données à la page 172. Avec ces définitions, on vérifie bien que

$$b_{11} = \pi\,\frac{3\cdot 5}{2^2}\sqrt{\frac{2\kappa}{m}}\, A_2(5) \quad \Longrightarrow \quad b_1 = \frac{1}{3\pi}\sqrt{\frac{2m}{\kappa}}\,\frac{1}{A_2(5)} ,$$

ce qui est bien l'expression utilisée.

Dans notre cas, il faut calculer β_1 et b_{11} correspondant à W^2 et non plus $\overset{\circ}{WW}$. Le calcul de β_1 est facile :

$$\beta_q = \frac{1}{n}\int d^3c\, f^{(0)}\, \mathcal{C}^2\, 1\, \mathcal{C}^2\, S_{5/2}^{(q-1)}(\mathcal{C}^2)$$

$$= \frac{1}{n}\int d^3\mathcal{C}\, \frac{n}{\pi^{3/2}}\, e^{-\mathcal{C}^2}\, \mathcal{C}^4\, S_{5/2}^{(q-1)}(\mathcal{C}^2)$$

$$= \frac{1}{\pi^{3/2}}\int d^3\mathcal{C}\, e^{-\mathcal{C}^2}\mathcal{C}^4 S_{5/2}^{(q-1)}(\mathcal{C}^2)$$

$$= \frac{4\pi}{\pi^{3/2}}\int_0^\infty d\mathcal{C}\, e^{-\mathcal{C}^2}\mathcal{C}^6 S_{5/2}^{(q-1)}(\mathcal{C}^2) \quad , x = \mathcal{C}^2,\ dx = 2\mathcal{C}d\mathcal{C}$$

$$= \frac{4\pi}{\pi^{3/2}}\int_0^\infty \frac{dx}{2\mathcal{C}}\, e^{-x}\, x^{6/2}\, S_{5/2}^{(q-1)}(x)\, \underbrace{S_{5/2}^{(0)}(x)}_{=1}$$

$$= \frac{4\pi}{2\pi^{3/2}}\underbrace{\int_0^\infty dx\, e^{-x}\, x^{5/2}\, S_{5/2}^{(q-1)}(x)\, S_{5/2}^{(0)}(x)}_{=\langle S_{5/2}^{(q-1)} | S_{5/2}^{(0)}\rangle} = \frac{\Gamma(5/2+0+1)}{0!}\,\delta_{q,1} = \Gamma\left(\frac{1}{2}+3\right)\delta_{q,1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^3}\,1\cdot 3\cdot 5\,\delta_{q,1} = \frac{\sqrt{\pi}\,3\cdot 5}{2^3}\,\delta_{q,1}$$

$$= \frac{4\pi}{2\pi^{3/2}}\,\frac{\sqrt{\pi}\,3\cdot 5}{2^3}\,\delta_{q,1}$$

$$= \frac{15}{4}\,\delta_{q,1}$$

Le calcul de b_{11} est sensiblement plus compliqué. Par définition dans mon cas (p. 151 et suivants)

$$b_{\substack{11\\pq}} = [S_{5/2}^{(p)}\mathcal{C}_1^2, S_{5/2}^{(q)}\mathcal{C}_2^2] ,$$

il faudra ensuite poser $p = q = \cancel{1}\,0$. Cette expression est donnée par le coefficient de $s^p t^q$ de l'expansion de

$$\left(\frac{ST}{st}\right)^{7/2}\frac{1}{\pi^3}\int d^3g\, d\varepsilon\, db\;\; g b\,(L_{12}(0) - L_{12}(\chi)) , \quad S = \frac{s}{1-s} , \quad T = \frac{t}{1-t}$$

$$L_{12}(\chi) = \int d^3\mathcal{C}_0\, e^{-\mathcal{C}_0^2 - g^2 - S\mathcal{C}_1^2 - T\mathcal{C}_2^2}\, \mathcal{C}_1'^2\, \mathcal{C}_2^2 \qquad \circledast$$

La différence avec le calcul canonique, est qu'ici on a $\mathcal{C}_1'^2\mathcal{C}_2^2$ dans $L_{12}(\chi)$, au lieu de $\overset{\circ}{\mathcal{C}_1'\mathcal{C}_1'} : \overset{\circ}{\mathcal{C}_2\mathcal{C}_2}$. On introduit les changement de variables (p. 150 et p. 151) (dans notre cas : $M_1 = M_2 = \nu_2$)

$$\varrho_1 = \sqrt{M_1}\,\varrho_0 - \sqrt{M_2}\,g$$
$$\varrho_2 = \sqrt{M_2}\,\varrho_0 + \sqrt{M_1}\,g$$
$$\varrho_1' = \sqrt{M_1}\,\varrho_0 - \sqrt{M_2}\,g' \qquad , \ |g| = |g'|$$

de sorte que

$$\varrho_1^2 + \varrho_2^2 = \varrho_0^2 + g^2$$
$$g \cdot g' = g^2 \cdot \cos\chi ,$$

ainsi :
$$\varrho_0^2 + g^2 + S\varrho_1'^2 + T\varrho_2^2 = i_{12}\,\varrho_0^2 + i_{21}\,g^2 + 2\sqrt{M_1M_2}\,\varrho_0\,(Tg - Sg') ,$$

$$\begin{cases} i_{12} = 1 + M_1 S + M_2 T \\ i_{21} = 1 + M_2 S + M_1 T \end{cases}$$

Introduisons le changement de variables

$$V = \varrho_0 + \frac{1}{i_{12}}\sqrt{M_1M_2}\,(Tg - Sg') \qquad , \quad d^3V = d^3\varrho_0$$

$$\Longrightarrow \quad \varrho_0^2 + g^2 + S\varrho_1'^2 + T\varrho_2^2 = i_{12}V^2 + j_{12}g^2$$

avec
$$j_{12} = i_{21} - \frac{M_1M_2}{i_{12}}\left(S^2 + T^2 - 2ST\cos\chi\right)$$

Avec ces changements de variables l'expression ⊛ devient

$$L_{12}(\chi) = \int d^3V\, e^{-i_{12}V^2 - j_{12}g^2}\, \varrho_1'^2\varrho_2^2 . \qquad (**)$$

Exprimons $\varrho_1' = \varrho_1'(V)$ et $\varrho_2 = \varrho_2(V)$. Soient les changements de variables

$$V_1 = \frac{M_1}{i_{12}}(Tg - Sg') + g'$$
$$V_2 = \frac{M_2}{i_{12}}(Tg - Sg') - g ,$$

de sorte que :

$$\varrho_1'^2\varrho_2^2 = M_1M_2V^4 + V^2(M_1^2V_2^2 + M_2^2V_1^2) + 4M_1M_2(V\cdot V_1)(V\cdot V_2) + M_1M_2V_1^2V_2^2 + O(V^k, k \text{ impair}) ,$$

Ce qui donne en l'insérant dans (**)

$$L_{12}(\chi) = \int d^3V\, e^{-i_{12}V^2 - j_{12}g^2}\, M_1M_2V^4 + \int d^3V\, e^{-i_{12}V^2 - j_{12}g^2}\, V^2\,(M_1^2V_2^2 + M_2^2V_1^2)$$
$$+ \int d^3V\, e^{-i_{12}V^2 - j_{12}g^2}\, 4M_1M_2\,(V\cdot V_1)(V\cdot V_2) + \int d^3V\, e^{-i_{12}V^2 - j_{12}g^2}\, M_1M_2V_1^2V_2^2$$

$$= M_1M_2\, e^{-j_{12}g^2}\, 4\pi \underbrace{\int_0^\infty dV\, e^{-i_{12}V^2}\, V^6}_{= \frac{1}{2}\frac{1}{i_{12}^{7/2}}\frac{5!!}{2^{6/2}}\sqrt{\pi}} + (M_1^2V_2^2 + M_2^2V_1^2)\, 4\pi\, e^{-j_{12}g^2}\underbrace{\int_0^\infty dV\, e^{-i_{12}V^2}\, V^4}_{= \frac{1}{2}\frac{1}{i_{12}^{5/2}}\frac{3!!}{2^{4/2}}\sqrt{\pi}}$$

$$+ 4M_1M_2\, e^{-j_{12}g^2}\int d^3V\, e^{-i_{12}V^2}\sum_{i,j=1}^{3} V_i V_{1i} V_j V_{2j} + M_1M_2V_1^2V_2^2\, e^{-j_{12}g^2}\, 4\pi\underbrace{\int_0^\infty dV\, e^{-i_{12}V^2}\, V^2}_{= \frac{1}{2}\frac{1}{i_{12}^{3/2}}\frac{1!!}{2^{2/2}}\sqrt{\pi}}$$

$$= e^{-j_{12}g^2}\, 4\pi\left(M_1M_2\sqrt{\pi}\, i_{12}^{-7/2}\,\frac{3\cdot 5}{2^4} + (M_1^2V_2^2 + M_2^2V_1^2)\sqrt{\pi}\, i_{12}^{-5/2}\,\frac{3}{2^3} + M_1M_2V_1^2V_2^2\sqrt{\pi}\, i_{12}^{-3/2}\,\frac{1}{2^2}\right)$$

$$+ 4M_1M_2\, e^{-j_{12}g^2}\underbrace{\sum_{i,j=1}^{3} V_{1i}V_{2j}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx_1\int_{-\infty}^{\infty} dx_2\int_{-\infty}^{\infty} dx_3\, e^{-i_{12}x^2}\, x_i x_j}_{= 0 \text{ si } i \neq j \text{ , d'où } i = j \text{ , p.ex } i = 1}}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} V_{1i}V_{2i}\int_{-\infty}^{\infty} dx_1\int_{-\infty}^{\infty} dx_2\int_{-\infty}^{\infty} dx_3\, e^{-i_{12}x_1^2}\, e^{-i_{12}x_2^2}\, e^{-i_{12}x_3^2}\, x_i^2$$

$$= (V_1\cdot V_2)\cdot\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx_1\, e^{-i_{12}x_1^2}\, x_1^2}_{= \frac{1}{i_{12}^{3/2}}\frac{1!!}{2^{2/2}}\sqrt{\pi}}\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} dx_2\, e^{-i_{12}x_2^2}\right)^2}_{= \left(\sqrt{\frac{\pi}{i_{12}}}\right)^2 = \pi / i_{12}}$$

$$= \pi^{3/2}\,\frac{1}{2}\, i_{12}^{-5/2}\,(V_1\cdot V_2)$$

$$L_{12}(x) = e^{-j_{12}g^2} 4\pi^{3/2}\left(M_1M_2\, i_{12}^{-7/2} \frac{3\cdot 5}{2^4} + (M_1^2V_2^2 + M_2^2V_1^2)\, i_{12}^{-5/2}\frac{3}{2^3} + M_1M_2 V_1^2V_2^2\, i_{12}^{-3/2}\frac{1}{2\cancel{x}}\right) \text{OK}$$

$$+ e^{-j_{12}g^2} 4\pi^{3/2} M_1M_2\, i_{12}^{-5/2} \frac{1}{2\cancel{x}} (V_1\cdot V_2)$$

$$= e^{-j_{12}g^2}\pi^{3/2} M_1M_2\, i_{12}^{-7/2}\left(\frac{3\cdot 5}{2^2} + \frac{M_1^2V_2^2+M_2^2V_1^2}{M_1M_2}\, i_{12}\frac{3}{2} + V_1^2V_2^2\, i_{12}^2 + 2\, i_{12}\, (V_1\cdot V_2)\right)$$

$$= e^{-j_{12}g^2}\pi^{3/2} M_1M_2\, i_{12}^{-7/2}\left(\frac{15}{4} + i_{12}\frac{3}{2}\frac{M_1^2V_2^2+M_2^2V_1^2}{M_1M_2} + i_{12}^2 V_1^2V_2^2 + 2\, i_{12}\, (V_1\cdot V_2)\right)$$

$$= e^{-j_{12}g^2}\pi^{3/2} M_1M_2\, i_{12}^{-7/2}\left(\frac{15}{4} + i_{12}\left(2\, V_1\cdot V_2 + \frac{3}{2}\frac{M_1^2V_2^2+M_2^2V_1^2}{M_1M_2}\right) + i_{12}^2 V_1^2V_2^2\right)$$

Il reste à calculer $V_1\cdot V_2$, $V_1^2V_2^2$ et V_1^2, V_2^2. Des définitions utilisées on a (p.152, 153)

$$V_1\cdot V_2 = \frac{g^2}{i_{12}}(1-j_{12}-\cos x)$$

$$V_1^2V_2^2 = (V_1\cdot V_2)^2 + \frac{g^4}{i_{12}^2}\sin^2 x = \frac{g^4}{i_{12}^2}\left((1-j_{12}-\cos x)^2 + \sin^2 x\right)$$

$$\Rightarrow \quad L_{12}(x) = \pi^{3/2} M_1M_2\, e^{-j_{12}g^2}\, i_{12}^{-7/2}\left(\frac{15}{4} + 2g^2(1-j_{12}-\cos x) + i_{12}\frac{3}{2}\frac{M_1^2V_2^2+M_2^2V_1^2}{M_1M_2} + g^4\left((1-j_{12}-\cos x)^2 + \sin^2 x\right)\right)$$

Il reste à calculer V_1^2 et V_2^2. Pour ce faire, on est obligé de poser le cas particulier $M_1 = M_2 = 1/2$, qui d'ailleurs n'est pas une restriction de généralité car dans notre modèle on a des particules identiques. Ainsi le dernier terme devient

$$\frac{M_1^2V_2^2 + M_2^2V_1^2}{M_1M_2} = V_1^2 + V_2^2$$

et avec les définitions de V_1 et V_2, avec $a = 1/2\; 1/i_{12}(Tg - S'g')$

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= a + g' \\ V_2 &= a - g\end{aligned}\right\} \Rightarrow V_1^2 + V_2^2 = a^2 + g'^2 + 2ag' + a^2 + g^2 - 2ag$$

$$= 2a^2 + g'^2 + g^2 + 2a(g'-g) \qquad g'^2 = g^2$$

$$= 2\,\frac{1}{4}\frac{1}{i_{12}^2}(Tg - S'g')^2 + 2g^2 + 2\,\frac{1}{2}\frac{1}{i_{12}}(Tg - S'g')(g'-g)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{i_{12}^2}\left(T^2g^2 + S'^2g'^2 - 2TS'gg'\right) + 2g^2 + \frac{1}{i_{12}}\left(Tgg' - Tg^2 - S'g'^2 + S'g'g\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{i_{12}^2}\left(g^2(T^2+S'^2) - 2TS'g^2\cos x\right) + 2g^2 + \frac{1}{i_{12}}\left((T+S')g^2\cos x - (T+S')g^2\right)$$

$$\Rightarrow L_{12}(x) = \pi^{3/2} M_1M_2\, e^{-j_{12}g^2}\, i_{12}^{-7/2}\Big(\frac{15}{4} + 2g^2(1-j_{12}-\cos x) + g^4\left((1-j_{12}-\cos x)^2 + \sin^2 x\right)$$

$$+ \frac{3}{2}\frac{1}{2}\, i_{12}^{-1}\left((T^2+S'^2)g^2 - 2S'Tg^2\cos x\right) + \frac{3}{\cancel{2}}\, i_{12}\,\cancel{2}g^2 \quad \rightarrow \frac{3}{4}\, i_{12}^{-1} g^2 (T^2 + S'^2 - 2S'T\cos x)$$

$$+ \frac{3}{2}\left((T+S')g^2\cos x - (T+S')g^2\right)\Big) \quad \rightarrow g^2\frac{3}{2}(T+S')(\cos x - 1)$$

$$= \pi^{3/2} M_1M_2\, e^{-j_{12}g^2}\, i_{12}^{-7/2}\Big(\frac{15}{4} + 2g^2(1-j_{12}-\cos x) + g^4\left((1-j_{12}-\cos x)^2 + \sin^2 x\right)$$

$$+ \frac{3}{4}\, i_{12}^{-1} g^2\left(T^2 + S'^2 - 2S'T\cos x\right) + 3\, i_{12}\, g^2 + \frac{3}{2}g^2(T+S')(\cos x - 1)\Big)$$

Essai de calcul de $L_{12}(x)$ ④ (I)

$$\underbrace{\left(\frac{s'T}{st}\right)^{7/2} \frac{1}{\sqrt{M_1M_2}} \frac{1}{\pi^{7/2}} L_{12}(x)}_{:= G_{12}(x)} = \left(\frac{s'T}{st}\right)^{7/2} e^{-j_{12} g^2}\, i_{12}^{-7/2} \Big(\frac{15}{4} + \overset{2}{\cancel{\ }} g^2 (1-j_{12}-\cos x) + g^4\left((1-j_{12}-\cos x)^2 + \sin^2 x\right)$$

$$+ \frac{3}{4} i_{12}^{-1} g^2 (T^2 + s'^2 - 2 s'T \cos x) + 3 i_{12} g^2 + \frac{3}{2} g^2 (T+s')(\cos x - 1) \Big)$$

$$\overset{\text{chgt. var idem}}{=} \cancel{\left(\frac{s'T}{st}\right)^{7/2}} \left(\cancel{\frac{s'T}{st}}(1-Y_{12})\right)^{-7/2} e^{-j_{12} g^2} \left(\frac{15}{4} + \overset{2}{\ } (1-j_{12}-\cos x) g^2 \right)$$

$$+ (1-Y_{12})^{-7/2} e^{-j_{12} g^2} \Big(\frac{3}{4} \left(\frac{s'T}{st}(1-Y_{12})\right)^{-1} g^2 (T^2 + s'^2 - 2 s'T \cos x)$$

$$+ 3 \frac{s'T}{st}(1-Y_{12}) g^2 + \frac{3}{2} g^2 (T+s')(\cos x - 1) + g^4\left((1-j_{12}-\cos x)^2 + \sin^2 x\right) \Big)$$

avec :
$$\begin{cases} Y_{12} = M_2 s + M_1 t = \frac{1}{2} s + \frac{1}{2} t \\ Z_{12} = 2 M_1 M_2\, st (1-\cos x) = \frac{1}{2} st(1-\cos x) \\ \frac{i_{12}}{s'T} = \frac{1-Y_{12}}{st} \; ; \; \frac{\partial j_{12}}{\partial Y_{12}} = \frac{j_{12}}{1-Y_{12}} \; ; \; j_{12} = \frac{1-Z_{12}}{1-Y_{12}} \; ; \; s' = \frac{s}{1-s} \; ; \; T = \frac{t}{1-t} \end{cases}$$

$s, t \in \,]0,1[$

$$\Rightarrow G_{12}(x) = (1-Y_{12})^{-7/2} e^{-j_{12} g^2} \left(\frac{15}{4} - j_{12} g^2_{\,-2}\right) + 2 \underbrace{(1-Y_{12})^{-7/2} e^{-j_{12} g^2} (1-\cos x) g^2}_{\text{ok : s'exprime en polynôme de Sonine}}$$

$$+ (1-Y_{12})^{-9/2} e^{-j_{12} g^2} \frac{3}{4} \frac{st}{s'T} \cancel{\frac{1}{1-Y_{12}}} g^2 (T^2 + s'^2 - 2 s'T \cos x)$$

$$+ (1-Y_{12})^{-5/2} e^{-j_{12} g^2}\, 3 \frac{s'T}{st} \cancel{(1-Y_{12})} g^2 + (1-Y_{12})^{-7/2} e^{-j_{12} g^2} \frac{3}{2} g^2 (T+s')(\cos x - 1)$$

$$+ (1-Y_{12})^{-7/2} e^{-j_{12} g^2} g^4 \left((1-j_{12} - \cos x)^2 + \sin^2 x \right)$$

Avant de continuer, il faut connaître mieux les définitions des Polynômes de Sonine. Soit $s \in \,]0,1[$, $s' = s/(1-s)$, alors $S_m^{(n)}(x)$ est défini par le développement :

$$\left(\frac{s'}{s}\right)^{m+1} e^{-x s'} = \frac{1}{(1-s)^{m+1}} e^{-x \frac{s}{1-s}} \overset{\text{def.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} s^n S_m^{(n)}(x) \qquad (*)$$

Mais aussi par développement de Taylor :

$$\frac{1}{(1-s)^{m+1}} e^{-x\frac{s}{1-s}} = \frac{1}{(1-s)^{m+1}} \sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{p!} \frac{s^p}{(1-s)^p} x^p \quad , \; (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha - i)}{k!} x^k$$

$$= \sum_{p \geq 0} \frac{(-x)^p}{p!} \frac{s^p}{(1-s)^{p+m+1}}$$

$$= \sum_{p \geq 0} \frac{(-x)^p s^p}{p!} \underbrace{\left(1 + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{q-1}(p+m+1-i)}{q!} s^q \right)}_{= \cancel{\sum_{q=0}^{\infty} \frac{(p+m+1)!}{(p+m+1-q)!\, q!} s^q}}$$

$$\Rightarrow S_m^{(n)}(x) = \sum_{p=0}^{n} (-x)^p \frac{(m+n)!}{p!\,(n-p)!\,(m+p)!}$$

Grâce à cette définition (*) on a :

$$e^{-j_{12} g^2} (1-Y_{12})^{-7/2} = e^{-\frac{1-Z_{12}}{1-Y_{12}} g^2} (1-Y_{12})^{-7/2}$$

$$= e^{-\frac{g^2}{1-Y_{12}}} e^{\frac{Z_{12} g^2}{1-Y_{12}}} (1-Y_{12})^{-7/2}$$

$$= e^{-\frac{g^2}{1-Y_{12}}} \sum_{r \geq 0} \frac{(Z_{12} g^2)^r}{r!} (1-Y_{12})^{-7/2-r}$$

$$= e^{-g^2 \frac{1}{1-Y_{12}}} \sum_{r \geq 0} \frac{(Z_{12} g^2)^r}{r!} \frac{1}{(1-Y_{12})^{r+7/2}}$$

$$= e^{-g^2 \underbrace{\frac{1-Y_{12}+Y_{12}}{1-Y_{12}}}_{= 1 + \frac{Y_{12}}{1-Y_{12}}}} \sum_{r \geq 0} \frac{(Z_{12} g^2)^r}{r!} \frac{1}{(1-Y_{12})^{r+7/2}}$$

$$= e^{-g^2} \sum_{r \geq 0} \frac{(Z_{12} g^2)^r}{r!} \underbrace{e^{-g^2 \frac{Y_{12}}{1-Y_{12}}} \frac{1}{(1-Y_{12})^{r+7/2}}}_{(*) :\; s \leftrightarrow Y_{12},\; x \leftrightarrow g^2,\; m+1 \leftrightarrow r+7/2}$$

$$= e^{-g^2} \sum_{r \geq 0} \frac{(Z_{12} g^2)^r}{r!} \sum_{n \geq 0} Y_{12}^n S_{r+\frac{5}{2}}^{(n)}(g^2)$$

$$= e^{-g^2} \sum_{r,n\geq 0} \frac{(z_{12} g^2)^r}{r!} Y_{12}^n S^{(n)}_{r+5/2}(g^2)$$

On peut généraliser le calcul pour trouver:

$$\boxed{e^{-j_{12} g^2} (1-Y_{12})^{-\alpha/2} = e^{-g^2} \sum_{r,n\geq 0} \frac{(z_{12} g^2)^r}{r!} Y_{12}^n S^{(n)}_{r+\frac{\alpha}{2}-1}(g^2)} = E_0(\alpha)$$

Il va falloir trouver plusieurs autres relations pour simplifier mon expression. On a:

$$(1-Y_{12})^{-\alpha/2} e^{-j_{12} g^2} (-j_{12} g^2) = (1-Y_{12})^{-\alpha/2} e^{-j_{12} g^2} \underbrace{\frac{-j_{12} g^2}{1-Y_{12}}}_{= -g^2 \frac{\partial j_{12}}{\partial Y_{12}}} (1-Y_{12})$$

$$= (1-Y_{12})^{-\alpha/2+1} e^{-j_{12} g^2} \frac{\partial}{\partial Y_{12}} (-g^2 j_{12})$$

$$= (1-Y_{12})^{-\alpha/2+1} \frac{\partial}{\partial Y_{12}} e^{-j_{12} g^2}$$

et:

$$(\tfrac{\alpha}{2}-1)(1-Y_{12})^{-\alpha/2} e^{-j_{12} g^2} = \frac{\partial}{\partial Y_{12}} \left((1-Y_{12})^{-\alpha/2+1} \right) e^{-j_{12} g^2}$$

Des deux dernières relations on a donc

$$\frac{\partial}{\partial Y_{12}} \Big(\underbrace{(1-Y_{12})^{-\alpha/2+1} e^{-j_{12} g^2}}_{= e^{-g^2} \sum_{r,n\geq 0} \frac{(z_{12} g^2)^r}{r!} Y_{12}^n S^{(n)}_{r+\frac{\alpha}{2}-2}(g^2)} \Big) = (1-Y_{12})^{-\alpha/2} e^{-j_{12} g^2} \left(\frac{\alpha}{2} - 1 - j_{12} g^2 \right)$$

$$= e^{-g^2} \sum_{r,n\geq 0} \frac{(z_{12} g^2)^r}{r!} n Y_{12}^{n-1} S^{(n)}_{r+\alpha/2-2}(g^2)$$

le terme en $n=0$ ne contribue pas à cause du facteur multiplicatif n. Chgt. de variables $m := n-1$, alors:

$$e^{-g^2} \sum_{r\geq 0} \sum_{n\geq 0} \frac{(z_{12} g^2)^r}{r!} n Y_{12}^{n-1} S^{(n)}_{r+\alpha/2-2}(g^2) = e^{-g^2} \sum_{r\geq 0} \sum_{m\geq -1} \frac{(z_{12} g^2)^r}{r!} (m+1) Y_{12}^m S^{(m+1)}_{r+\alpha/2-2}(g^2)$$

$$\underset{\substack{\text{terme}\\ m=-1\\ \text{contrib. pas}}}{\overset{m:=n}{=}} e^{-g^2} \sum_{m\geq 0} \frac{(z_{12} g^2)^r}{r!} (n+1) Y_{12}^n S^{(n+1)}_{r+\alpha/2-2}(g^2),$$

ce qui donne finalement

$$\boxed{(1-Y_{12})^{-\alpha/2} e^{-j_{12} g^2} \left(\frac{\alpha}{2} - 1 - j_{12} g^2\right) = e^{-g^2} \sum_{r,n\geq 0} \frac{(z_{12} g^2)^r}{r!} (n+1) Y_{12}^n S^{(n+1)}_{r+\frac{\alpha}{2}-2}(g^2)} = E_1(\alpha)$$

Avec ces relations, on a:

$$G_{11}(\chi) = \underbrace{(1-Y_{12})^{-7/2} e^{-j_{12} g^2} \left(\frac{5}{2} - j_{12} g^2\right)}_{= E_1(7)} + \underbrace{(1-Y_{12})^{-7/2} e^{-j_{12} g^2}}_{= E_0(7)} \frac{5}{4} + \underbrace{(1-Y_{12})^{-7/2} e^{-j_{12} g^2} (1-\cos\chi) g^2}_{= (1-\cos\chi) g^2 E_0(7)}$$

$$+ \underbrace{(1-Y_{12})^{-9/2} e^{-j_{12} g^2}}_{= E_0(9)} \frac{3}{4} \frac{\delta t}{\delta T} g^2 (\delta^2 + T^2 - 2\delta T \cos\chi) + \underbrace{(1-Y_{12})^{-5/2} e^{-j_{12} g^2}}_{= E_0(5)} 3 \frac{\delta T}{\delta t} g^2$$

$$+ \underbrace{(1-Y_{12})^{-7/2} e^{-j_{12} g^2}}_{= E_0(7)} \frac{3}{2} g^2 (T+\delta)(\cos\chi - 1) + \underbrace{(1-Y_{12})^{-7/2} e^{-j_{12} g^2}}_{= E_0(7)} g^4 \left((1-j_{12})^2 + \underbrace{\cos^2\chi + \sin^2\chi}_{=1} - 2\cos\chi (1-j_{12}) \right)$$

Il convient, avant de sommer individuellement les contributions à l'ordre $\alpha = 7$, de voir s'il n'est pas possible de mieux resommer ces contributions.

$$G_{12}(x) = E_0(3)\,\frac{3}{4}\,\frac{S t}{S' T}\, g^2\left(S'^2+T^2-2S'T\cos x\right) + E_0(5)\; 3\,\frac{S'T}{St}\, g^2$$

$$+E_0(7)\cdot\left(\frac{5}{4} + (1-\cos x)g^2 + \frac{3}{2}g^2(T+S')(\cos x-1) + g^4\left(\cancel{1}\,2 - 2j_{12} + j_{12}^2 - 2\cos x + 2\cos x\, j_{12}\right)\right)$$

$$+E_1(7)\,.$$

En effet, on voit apparaître un terme ~ à $j_{12}^2 g^4$, qui laisse suggérer une dérivée seconde. De plus, tous les termes pas en $(1-\cos x)$ vont disparaître car on va évaluer $H_1(0)-H_1(x)$.
On a trouvé:

$$\frac{\partial}{\partial Y_{12}}\left((1-Y_{12})^{-\alpha/2+1}e^{-j_{12}g^2}\right) = (1-Y_{12})^{-\alpha/2}e^{-j_{12}g^2}\left(\alpha/2-1-j_{12}g^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial Y_{12}^2}\left((1-Y_{12})^{-\alpha/2+1}e^{-j_{12}g^2}\right) = +\frac{\alpha}{2}(1-Y_{12})^{-\alpha/2-1}e^{-j_{12}g^2}\left(\frac{\alpha}{2}-1-j_{12}g^2\right)$$

$$+ (1-Y_{12})^{-\alpha/2}e^{-j_{12}g^2}\frac{\partial}{\partial Y_{12}}(-j_{12})g^2\left(\frac{\alpha}{2}-1-j_{12}g^2\right)$$

$$+ (1-Y_{12})^{-\alpha/2}e^{-j_{12}g^2}\underbrace{\frac{\partial}{\partial Y_{12}}(-j_{12})}_{=-\frac{j_{12}}{1-Y_{12}}}g^2$$

$$= \frac{\alpha}{2}(1-Y_{12})^{-\alpha/2-1}e^{-j_{12}g^2}\left(\frac{\alpha}{2}-1-j_{12}g^2\right)$$

$$-j_{12}g^2(1-Y_{12})^{-\alpha/2-1}e^{-j_{12}g^2}\left(\frac{\alpha}{2}\cancel{-1}-j_{12}g^2\cancel{+1}\right)$$

$$= (1-Y_{12})^{-\alpha/2-1}e^{-j_{12}g^2}\left(\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{2}-1-j_{12}g^2\right) - j_{12}g^2\left(\frac{\alpha}{2}-j_{12}g^2\right)\right)$$

$$= (1-Y_{12})^{-\alpha/2-1}e^{-j_{12}g^2}\left(\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2-\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}j_{12}g^2-\frac{\alpha}{2}j_{12}g^2+j_{12}^2g^4\right)$$

$$= (1-Y_{12})^{-\frac{\alpha}{2}-1}e^{-j_{12}g^2}\left(\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)+j_{12}g^2\left(-\alpha+j_{12}g^2\right)\right)$$

Le membre de gauche de cette dernière équation se calcule :

$$\frac{\partial^2}{\partial Y_{12}^2}\left((1-Y_{12})^{-\alpha/2+1}e^{-j_{12}g^2}\right) = \frac{\partial}{\partial Y_{12}}\, e^{-g^2}\sum_{r,n\geq 0}\frac{(z_{12}g^2)^r}{r!}(n+1)\,Y_{12}^n\, S^{(n+1)}_{r+\alpha/2-2}(g^2)$$

$$= e^{-g^2}\sum_{r\geq0}\sum_{n\geq0}\frac{(z_{12}g^2)^r}{r!}(n+1)\,n\,Y_{12}^{n-1}S^{(n+1)}_{r+\alpha/2-2}(g^2) \qquad , n=0 : \text{contr. pas}; \quad m:=n-1, \; n=m-1$$

$$= e^{-g^2}\sum_{r\geq0}\sum_{m\geq-1}\frac{(z_{12}g^2)^r}{r!}(m+2)\cdot(m+1)\,Y_{12}^m\, S^{(m+2)}_{r+\alpha/2-2}(g^2) \qquad , n:=m$$

$$= e^{-g^2}\sum_{\substack{r\geq0\\ n\geq0}}\frac{(z_{12}g^2)^r}{r!}(n+2)(n+1)\,Y_{12}^n\, S^{(n+2)}_{r+\alpha/2-2}(g^2)$$

$= -\frac{\beta}{2}-1+\frac{1}{2} = -\frac{\beta}{2}$ $\quad \alpha=\beta-2$ $\quad \alpha/2=\frac{\beta}{2}-1$ $\quad \beta=\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2} \Rightarrow \frac{\beta}{2}-\frac{\beta}{2}=\frac{\alpha}{2}$ $\quad r+\frac{\beta}{2}-1-2$

Ce qui donne finalement: $\quad = \left(\frac{\beta}{2}-1\right)\left(\frac{\beta}{2}-1-1\right) = \left(\frac{\beta}{2}-1\right)\left(\frac{\beta}{2}-2\right)$

$$\boxed{(1-Y_{12})^{-\alpha/2-1}e^{-j_{12}g^2}\left(\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)+j_{12}g^2\left(j_{12}g^2-\alpha\right)\right) = e^{-g^2}\sum_{n,r\geq0}\frac{(z_{12}g^2)^r}{r!}(n+2)(n+1)\,Y_{12}^n\, S^{(n+2)}_{r+\alpha/2-2}(g^2)} = E_2(\alpha)$$

$\to \beta+2$

Voyons si ce terme existe, en mettant ensemble tous les $E_0(7)$, et $E_1(7)$:

$$(1-Y_{12})^{-7/2}e^{-j_{12}g^2}\left(\frac{15}{4}-j_{12}g^2+(1-\cos x)g^2+\frac{3}{2}g^2(T+S')(\cos x-1)+g^4\left(1-2j_{12}+j_{12}^2-2\cos x+2\cos x\, j_{12}\right)\right)$$

$$= (1-Y_{12})^{-7/2}e^{-j_{12}g^2}\left(\underbrace{\frac{15}{4}-j_{12}g^2+g^4j_{12}^2}_{\text{ici on a une dérivée seconde}}+(1-\cos x)g^2+\frac{3}{2}g^2(T+S')(\cos x-1)+g^4-2g^4j_{12}-2g^4\cos x(1+j_{12})\right)$$

Avec : $\quad -\frac{\alpha}{2}-1 = -7/2 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{7}{2}-1 = \frac{5}{2} \Rightarrow \alpha=5$ $\qquad \left(\frac{7}{2}-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{7}{2}-\frac{4}{2}\right)$

donc on doit avoir $\quad (1-Y_{12})^{-7/2}e^{-j_{12}g^2}\left(\underbrace{\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}-\frac{2}{2}\right)}_{=15/4}+j_{12}^2g^4-5j_{12}g^2\right)$, i.e. $\qquad \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{15}{4}$

⑦ (IV)

$$\frac{15}{4} - j_{12} g^2 + g^4 j_{12}^2 = \frac{15}{4} + j_{12}^2 g^4 - 5 j_{12} g^2 + 4 j_{12} g^2 ,$$

ainsi :

$$(1-Y_{12})^{-7/2} e^{-j_{12} g^2} (\dots) = \underbrace{(1-Y_{12})^{-7/2} e^{-j_{12} g^2} \left(\frac{15}{4} + j_{12}^2 g^4 - 5 j_{12} g^2 \right)}_{= E_2(5)}$$

$$+ (1-Y_{12})^{-7/2} e^{-j_{12} g^2} \left(5 j_{12} g^2 + 2(1-\cos\chi) g^2 + \frac{3}{2} g^2 (T+S)(\cos\chi - 1) + 2 g^4 - 2 g^4 j_{12} - 2 g^4 \cos\chi (1 - j_{12}) \right)$$

$$= E_2(5) - 5 \underbrace{(1-Y_{12})^{-7/2} e^{-j_{12} g^2}\left(\frac{5}{2} - j_{12} g^2 - \frac{5}{2} \right)}_{= E_1(7)}$$

$$+ (1-Y_{12})^{-7/2} e^{-j_{12} g^2} \left(2g^2 - 2\cos\chi g^2 + \frac{3}{2} g^2 (T+S)(\cos\chi - 1) + 2g^4 - 2 g^4 j_{12} + 2 g^4 \cos\chi j_{12} - 2 g^4 \cos\chi \right)$$

erreur !

$$= E_2(5) - 5 E_1(7) + \overset{=10}{4 \cdot \frac{5}{2}} \underbrace{(1-Y_{12})^{-7/2} e^{-j_{12} g^2}}_{= E_0(7)}$$

$$+ g^2 (1-Y_{12})^{-7/2} e^{-j_{12} g^2} \left(1 - \cos\chi + \frac{3}{2}(T+S)(\cos\chi - 1) + g^2 - 2 g^2 j_{12} - 2 g^2 \cos\chi j_{12} - 2 g^2 \cos\chi \right)$$

$$= E_2(5) - 5 E_1(7) + 10 E_0(7) + g^2 (1-Y_{12})^{-7/2} e^{-j_{12} g^2} \overbrace{(1 - 2 g^2 j_{12})}^{= 2(5/2 - g^2 j_{12}) - 4}$$

$$+ g^2 \cos\chi (1-Y_{12})^{-7/2} e^{-j_{12} g^2} \overbrace{(-1 - 2 g^2 j_{12})}^{= +2(5/2 - g^2 j_{12}) - 6}$$

$$+ \left(\frac{3}{2}(T+S)(\cos\chi - 1) + g^2 - 2 g^2 \cos\chi \right) g^2 (1-Y_{12})^{-7/2} e^{-j_{12} g^2}$$

$$= E_2(5) - 5 E_1(7) + 10 E_0(7) + 2 g^2 \underbrace{(1-Y_{12})^{-7/2} e^{-j_{12} g^2} \left(\frac{5}{2} - g^2 j_{12} \right)}_{= E_1(7)}$$

$$- 4 g^2 (1-Y_{12})^{-7/2} e^{-j_{12} g^2}$$

$$+ 2 g^2 \cos\chi \underbrace{(1-Y_{12})^{-7/2} e^{-j_{12} g^2} \left(5/2 - g^2 j_{12} \right)}_{= E_1(7)}$$

$$- 6 g^2 \cos\chi (1-Y_{12})^{-7/2} e^{-j_{12} g^2}$$

$$+ \left(\frac{3}{2}(T+S)(\cos\chi - 1) + g^2 - 2 g^2 \cos\chi \right) g^2 (1-Y_{12})^{-7/2} e^{-j_{12} g^2}$$

$$= E_2(5) - 5 E_1(7) + 10 E_0(7) + 2 g^2 E_1(7) + 2 g^2 \cos\chi E_1(7)$$

$$+ g^2 \underbrace{(1-Y_{12})^{-7/2} e^{-j_{12} g^2}}_{= E_0(7)} \left(-4 - 6 g^2 \cos\chi + \frac{3}{2}(T+S)(\cos\chi - 1) + g^2 - 2 g^2 \cos\chi \right)$$

$$= E_2(5) - 4 E_1(7) + 2 g^2 (1 + \cos\chi) E_1(7)$$

$$+ E_0(7) \cdot \left\{ 10 + g^2 \left(-4 + \frac{3}{2}(T+S)(\cos\chi - 1) - 8 g^2 \cos\chi + g^2 \right) \right\}$$

Ainsi, on a finalement :

$$\boxed{\begin{aligned} G_{12}(\chi) = {} & E_0(9) \cdot \frac{3}{4} \frac{st}{ST} g^2 \left(S^2 + T^2 - 2 S T \cos\chi \right) + E_0(5)\, 3 \frac{ST}{st} g^2 + E_2(5) - 4 E_1(7) \\ & + E_1(7)\, 2 \left\{ g^2 (1 + \cos\chi) - 2 \right\} + E_0(7) \left\{ 10 + g^2 \left(-4 + \frac{3}{2}(T+S)(\cos\chi - 1) \right) + g^4 (1 - 8\cos\chi) \right\} \end{aligned}}$$

Qu'est-ce qu'on a fait ? On a exprimé $G_{12}(\chi)$ en terme de polynômes de Sonine.
Que faut-il faire pour continuer ? Exprimer la chose en terme des poly. de Sonine explicitement, remplacer les expressions de Y_{12} et Z_{12}, utiliser la relation binômiale et voir si on peut mettre en évidence les puissances de s et t.
On voit tout de suite que ce ne sera pas aussi facile que dans le Chapman, car s et t apparaissent à plusieurs endroits différents. Mais on va pouvoir choisir par simplification directement les termes de plus bas ordre, car seuls $S_{12}^{(0)}$ nous intéresse, c'est-à-dire l'ordre 0, $p=q=0$. Sans faire cette approx, on ne s'en sort pas.

En remplaçant $E_i(s)$ et $Y_{12} = 1/2\, s + 1/2\, t$, $Z_{12} = 1/2\, st(1-\cos\chi)$ on a : (avec $\mathcal{S} = s/_{1-s}$; $T = t/_{1-t}$) ⑧

$$G_{12}(\chi) = e^{-g^2} \sum_{\substack{r\geq 0\\ n\geq 0}} \frac{(Z_{12} g^2)^r}{r!} Y_{12}^n \Big(S^{(n)}_{r+\frac{3}{2}-\frac{2}{2}}(g^2) \cdot \frac{3}{4}\frac{st}{\mathcal{S}T} g^2 (\mathcal{S}^2 + T^2 - 2\mathcal{S}T\cos\chi)$$
$$+ S^{(n)}_{r+\frac{5}{2}-\frac{2}{2}}(g^2)\, 3 \frac{\mathcal{S}T}{st} g^2 + (n+2)(n+1) S^{(n+2)}_{r+\frac{5}{2}-\frac{4}{2}}(g^2) - 4(n+1) S^{(n+1)}_{r+\frac{7}{2}-\frac{4}{2}}(g^2)$$
$$+ (n+1) S^{(n+1)}_{r+\frac{7}{2}-\frac{4}{2}}(g^2) \cdot 2\left(g^2(1+\cos\chi)-2\right)$$
$$+ S^{(n)}_{r+\frac{7}{2}-\frac{2}{2}}(g^2) \left(10 + g^2\left[-4+\tfrac{3}{2}(T+\mathcal{S})(\cos\chi-1)\right] + g^4(1-8\cos\chi)\right)\Big)$$

$$= \frac{1}{2^r}(st)^r(1-\cos\chi)^r$$

$$= e^{-g^2} \sum_{n,r\geq 0} \frac{(Z_{12}g^2)^r}{r!} Y_{12}^n \Big(S^{(n)}_{r+5/2}(g^2)\, \frac{3}{4}\frac{st}{\mathcal{S}T} g^2 (\mathcal{S}^2+T^2-2\mathcal{S}T\cos\chi) + S^{(n)}_{r+\frac{3}{2}}(g^2)\, 3\frac{\mathcal{S}T}{st} g^2$$
$$+ (n+2)(n+1) S^{(n+2)}_{r+\frac{1}{2}}(g^2) - 4(n+1) S^{(n+1)}_{r+\frac{3}{2}}(g^2)$$
$$+ (n+1) S^{(n+1)}_{r+\frac{3}{2}}(g^2)\, 2\left(g^2(1+\cos\chi)-2\right)$$
$$+ S^{(n)}_{r+5/2}(g^2)\left(10 + g^2\left(-4+\tfrac{3}{2}(T+\mathcal{S})(\cos\chi-1)\right) + g^4(1-8\cos\chi)\right)\Big)$$

$$Y_{12}^n = \frac{1}{2^r}(s+t)^r$$

On doit exprimer cette expression sous la forme :

$$G_{12}(\chi) = e^{-g^2} \sum_{pqr\ell\geq 0} A_{pqr\ell} \left(s/2\right)^p \left(t/2\right)^q g^{2r} \cos^\ell\chi ,$$

et dans mon cas je ne m'intéresse qu'au coefficient $p=q=0$, si cela est trop compliqué de faire $\forall p,q$. On va donc avoir plusieurs sommes, des indices à changer, réunir les sommes, etc. Avant de commencer, on va utiliser :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$\frac{st}{\mathcal{S}T} = st \cdot \frac{1-s}{s} \cdot \frac{1-t}{t} = (1-s)(1-t) = 1-s-t+st$$

$$\mathcal{S}^2 = s^2(1-s)^{-2} = s^2\left(1-2s+\frac{-2(-3)}{2!}s^2+\dots\right) = s^2 - 2s^3 + O(s^4)$$

$$T^2 = t^2(1-t)^{-2} = t^2 - 2t^3 + O(t^4)$$

$$\mathcal{S}T = st\, \frac{1}{1-s}\frac{1}{1-t} = st\left(1 + \nabla\left(\frac{1}{1-s}\frac{1}{1-t}\right)\Big|_{s=t=0}\binom{s}{t} + \dots\right) = st(1+st+\dots)$$
$$= st + (st)^2 + O((st)^3)$$

$$\frac{\mathcal{S}T}{st} = \frac{s}{1-s}\,\frac{t}{1-t}\,\frac{1}{st} = \frac{1}{1-s}\,\frac{1}{1-t} = 1 + st + O((st)^2)$$

$$\frac{st}{\mathcal{S}T}\left(\mathcal{S}^2+T^2-2\mathcal{S}T\cos\chi\right) = (1-s-t+st)\left(s^2+t^2-2\left(st+(st)^2+\dots\right)\cos\chi\right)$$
$$= s^2+t^2-2st\cos\chi - 2(st)^2\cos\chi + \dots$$
$$= -2st\cos\chi + O((st)^2)$$

$$\mathcal{S} = s\frac{1}{1-s} = s(1-s+s^2+\dots) = s - s^2 + O(s^3)$$

On va vraiment prendre les ordres les plus bas, pour éviter de trop compliquer. On va en rester à l'ordre linéaire, de sorte que

$$\frac{st}{\mathcal{S}T}\left(\mathcal{S}^2+T^2-2\mathcal{S}T\cos\chi\right) = -2st\cos\chi + O((st)^2, s^2t, st^2)$$

$$\frac{\mathcal{S}T}{st} = 1 + st + O(s^2t, st^2, (st)^2)$$

$$\mathcal{S} = s + O(s^2)$$
$$T = t + O(t^2)$$

En remplaçant, on a ainsi :

$$G_{12}(x) = e^{-g^2}\sum_{r,n\geq 0} \frac{(Z_{12}\, g^2)^r}{r!}\, Y_{12}^{\,n} \Big(S^{(n)}_{r+\frac{7}{2}}(g^2)\; \frac{3}{4} g^2 \,(-2\, st\cos x) + S^{(n)}_{r+\frac{3}{2}}(g^2)\; 3g^2\, (1+st)$$
$$+ (n+2)(n+1)\, S^{(n+2)}_{r+1/2}(g^2) - 4(n+1)\, S^{(n+1)}_{r+3/2}(g^2) + 2(n+1)\, S^{(n+1)}_{r+\frac{3}{2}}(g^2)\,\big(g^2(1+\cos x)-2\big)$$
$$+ S^{(n)}_{r+\frac{5}{2}}(g^2)\Big(10 + g^2\big(-4 + \tfrac{3}{2}(s+t)(\cos x-1)\big) + g^4(1-8\cos x)\Big)\Big)$$

$$= e^{-g^2}\sum_{r,n\geq 0} \frac{(Z_{12}\, g^2)^r}{r!}\, Y_{12}^{\,n} \Big(-\frac{3}{2}\cancel{st}\cos x\, S^{(n)}_{r+\frac{7}{2}}(g^2) + 3g^2(1+\cancel{st})\, S^{(n)}_{r+3/2}(g^2)$$
$$+ (n+2)(n+1)\, S^{(n+2)}_{r+1/2}(g^2) + 2(n+1)\big(g^2(1+\cos x)-2-2\big)\, S^{(n+1)}_{r+3/2}(g^2)$$
$$+ S^{(n)}_{r+\frac{5}{2}}(g^2)\Big(10 + g^2\big(-4 + \tfrac{3}{2}\cancel{(s+t)}(\cos x-1)\big) + g^4(1-8\cos x)\Big)\Big)$$

Pour simplifier encore, on ne va prendre que l'ordre le plus bas.

$$G_{12}(x) = e^{-g^2}\sum_{r,n\geq 0} \frac{(Z_{12}\, g^2)^r}{r!}\, Y_{12}^{\,n} \Big(3g^2\, S^{(n)}_{r+\frac{3}{2}}(g^2) + (n+2)(n+1)\, S^{(n+2)}_{r+\frac{1}{2}}(g^2) + 2(n+1)\big(g^2(1+\cos x)-4\big) S^{(n+1)}_{r+\frac{3}{2}}(g^2)$$
$$+ S^{(n)}_{r+5/2}(g^2)\big(10-4g^2+g^4(1-8\cos x)\big)\Big),$$

avec:

$$Z_{12}^{\,r} = \left(\tfrac{1}{2}\, st\,(1-\cos x)\right)^r = \frac{1}{2^r}(1-\cos x)^r\,(st)^r = 1 + O(st) \iff r=0$$
$$Y_{12}^{\,n} = \left(\frac{s}{2}+\frac{t}{2}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{s}{2}\right)^k\left(\frac{t}{2}\right)^{n-k} = O(1) \iff n=0,$$

on voit qu'il faut que $r=n=0$ pour avoir l'ordre le plus bas. Ainsi

$$G_{12}(x) = e^{-g^2}\Big(3g^2\, \underbrace{S^{(0)}_{0+3/2}(g^2)}_{=1} + 2\, S^{(2)}_{1/2}(g^2) + 2\big(g^2(1+\cos x)-4\big)\, S^{(1)}_{3/2}(g^2)$$
$$+ \underbrace{S^{(0)}_{5/2}(g^2)}_{=1}\big(10-4g^2+g^4(1-8\cos x)\big)\Big)$$
$$= e^{-g^2}\Big(\cancel{3g^2} + 2\, S^{(2)}_{1/2}(g^2) + 2\big(g^2(1+\cos x)-4\big)\, S^{(1)}_{3/2}(g^2) + 10 - \cancel{4}g^2 + g^4(1-8\cos x)\Big)$$
$$= e^{-g^2}\Big(10 - g^2 + g^4(1-8\cos x) + 2\, S^{(2)}_{1/2}(g^2) + 2\big(g^2(1+\cos x)-4\big)\, S^{(1)}_{3/2}(g^2)\Big)$$

On utilise:

$$S_e^{(1)}(x) = e+1-x$$
$$S_e^{(2)}(x) = 1/2\,(e+1)(e+2) - (e+2)\,x + 1/2\, x^2$$

$$\Rightarrow\; S^{(2)}_{1/2}(g^2) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}+1\right)\left(\tfrac{1}{2}+2\right) - \left(\tfrac{1}{2}+2\right)g^2 + \tfrac{1}{2}g^4 = \tfrac{1}{2}\,\tfrac{3}{2}\,\tfrac{5}{2} - \tfrac{5}{2}g^2 + \tfrac{1}{2}g^4 = \tfrac{15}{8} - \tfrac{5}{2}g^2 + \tfrac{1}{2}g^4$$
$$S^{(1)}_{3/2}(g^2) = \tfrac{3}{2}+1-g^2 = \tfrac{5}{2}-g^2$$

pour obtenir:

$$G_{12}(x) = e^{-g^2}\Big(10 - g^2 + g^4 - 8g^4\cos x + \frac{15}{4} - 5g^2 + g^4 + (2g^2 + 2g^2\cos x - 8)\left(\tfrac{5}{2}-g^2\right)\Big)$$
$$= e^{-g^2}\Big(\frac{55}{4} - 6g^2 + \cancel{2g^4} - 8g^4\cos x + 5g^2 - \cancel{2g^4} + 5g^2\cos x - 2g^4\cos x - 8\cdot\tfrac{5}{2} + 8g^2\Big)$$
$$= e^{-g^2}\Big(\underbrace{\frac{55}{4} - \frac{80}{4}}_{=\frac{25}{4}} + g^2\underbrace{(-6+5+8)}_{=7} - 10g^4\cos x + 5g^2\cos x\Big)$$
$$= e^{-g^2}\Big(\frac{25}{4} + 7g^2 + 5g^2\cos x - 10g^4\cos x\Big)$$
$$= e^{-g^2}\sum_{pqre\geq 0} A_{pqre}\left(\frac{s}{2}\right)^p\left(\frac{t}{2}\right)^q g^{2r}\cos^e x$$

$$\Longrightarrow\; p=q=0\;\; \forall r,e,\quad \begin{cases} A_{0000} = 25/4 \\ A_{0010} = 7 \\ A_{0011} = 5 \\ A_{0021} = -10 \end{cases}$$

Ces 4 coefficients déterminent entièrement l'ordre le plus bas, et par conséquent b_{11}. On a donc :

$$[S_{5/2}^{(p)}\mathcal{C}_1^2, S_{5/2}^{(q)}\mathcal{C}_2^2] = \text{Coeff. } s^p t^q \text{ de } \left(\frac{s^r T}{st}\right)^{7/2} \frac{1}{\pi^3} \iiint d^3g\, db\, d\varepsilon\; g b \left(L_{12}(0) - L_{12}(\chi)\right) ,$$

or on a calculé :

$$G_{12}(\chi) = \left(\frac{s^r T}{st}\right)^{7/2} \frac{1}{\cancel{\sqrt{M_1M_2}}} \frac{1}{\pi^{3/2}} L_{12}(\chi) = e^{-g^2} \sum_{pqre} A_{pqre} (M_1 s)^p (M_2 t)^q g^{2r} \cos^e \chi$$

$$= e^{-g^2} \sum_{pqre} A_{pqre} \left(\frac{s}{2}\right)^p \left(\frac{t}{2}\right)^q g^{2r} \cos^e \chi$$

$$\Rightarrow \cancel{\sqrt{M_1M_2}} \frac{1}{\pi^{3/2}} G_{12}(\chi) = \left(\frac{s^r T}{st}\right)^{7/2} \frac{1}{\pi^3} L_{12}(\chi) = \cancel{\sqrt{M_1M_2}} \frac{1}{\pi^{3/2}} e^{-g^2} \sum_{pqre} A_{pqre} \left(\frac{s}{2}\right)^p \left(\frac{t}{2}\right)^q g^{2r} \cos^e \chi$$

$$\Rightarrow [S_{5/2}^{(p)}\mathcal{C}_1^2, S_{5/2}^{(q)}\mathcal{C}_2^2] = \cancel{\sqrt{M_1M_2}} \frac{1}{\pi^{3/2}} \iiint d^3g\, db\, d\varepsilon\; g b\, e^{-g^2} \sum_{re} A_{pqre} (M_1)^p (M_2)^q g^{2r} (1 - \cos^e \chi)$$

$$= M_1^{p+1/2} M_2^{q+1/2} \frac{1}{\pi^{3/2}} \int d^3g\, db\, d\varepsilon\; g b\, e^{-g^2} \sum_{re} A_{pqre}\, g^{2r} (1 - \cos^e \chi)$$

symétrie sphérique de notre solution en g : $d^3g = 4\pi\, dg\, g^2$. Indépendant de ε, ε = angle $\in [0, 2\pi]$, ainsi :

$$[S_{5/2}^{(p)}\mathcal{C}_1^2, S_{5/2}^{(q)}\mathcal{C}_2^2] = 8\pi^{1/2} M_1^{p+1/2} M_2^{q+1/2} \int dg\, db\; g b\, e^{-g^2} \sum_{re} A_{pqre}\, g^{2r+2} (1 - \cos^e \chi)$$

$$= 8 M_1^{p+1/2} M_2^{q+1/2} \sum_{re} A_{pqre} \underbrace{\sqrt{\pi} \int dg\, db\; g b\, e^{-g^2} g^{2r+2} (1 - \cos^e \chi)}_{:= \Omega_{12}^{(e)}(r)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} &[S_{5/2}^{(p)}\mathcal{C}_1^2, S_{5/2}^{(q)}\mathcal{C}_2^2] = 8 M_1^{p+1/2} M_2^{q+1/2} \sum_{re} A_{pqre}\, \Omega_{12}^{e}(r) \\ &\Omega_{12}^{(e)}(r) = \sqrt{\pi} \int dg\, db\; g b\, e^{-g^2} g^{2r+2} (1 - \cos^e \chi) \end{aligned}}$$

On connaît presque $\Omega_{12}^{(e)}(r)$ par le gaz de Maxwell. On a les relations $\Omega_{12}^{(0)}(r) = 0$ et $\Omega_{12}^{(e)}(r) > 0$. En fait, $\Omega_1^{(e)}(r)$ se trouve simplement en posant $M_1 = M_2$. Dans notre cas, $M_1 = M_2 = \frac{1}{2}$, et en s'intéressant à $p = q = 0$ on a :

$$b_{11} = [S_{5/2}^{(0)}\mathcal{C}_1^2, S_{5/2}^{(0)}\mathcal{C}_2^2] = 8 \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{re} A_{00re}\, \Omega_1^{(e)}(r)$$

$$= 4 A_{0000} \underbrace{\cancel{\Omega_1^{(0)}(0)}}_{=0} + 4 A_{0010} \underbrace{\cancel{\Omega_1^{(0)}(1)}}_{=0}$$

$$+ 4 A_{0011}\, \Omega_1^{(1)}(1) + 4 A_{0021}\, \Omega_1^{(1)}(2)$$

$$= 20\, \Omega_1^{(1)}(1) - 40\, \Omega_1^{(1)}(2)$$

$$= 20 \frac{\pi}{2^{1+2}} (2+1)!! \sqrt{\frac{2\varkappa}{m}} A_1(5) - 40 \frac{\pi}{2^{2+2}} (2\cdot 2+1)!! \sqrt{\frac{2\varkappa}{m}} A_1(5)$$

$$= \frac{20\pi \cdot 3}{2^3} \sqrt{\frac{2\varkappa}{m}} A_1(5) - \frac{40\pi \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4} \sqrt{\frac{2\varkappa}{m}} A_1(5)$$

$$= \sqrt{\frac{2\varkappa}{m}} A_1(5)\, \pi \left(\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot 5\cdot 3}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot 2} - \frac{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot 5\cdot 3\cdot 5}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot 2} \right)$$

$$= \sqrt{\frac{2\varkappa}{m}} A_1(5)\, \pi \left(\frac{15}{2} - 5 \cdot \frac{15}{2} \right)$$

$$= -4 \cdot \frac{15}{2} \sqrt{\frac{2\varkappa}{m}} A_1(5)\, \pi$$

$$= -30\pi \sqrt{\frac{2\varkappa}{m}} A_1(5)$$

$$\Rightarrow b_1 = \frac{\beta_1}{b_{11}} = -\frac{15}{4} \frac{1}{30\pi} \sqrt{\frac{m}{2\varkappa}} \frac{1}{A_1(5)}$$

$$= -\frac{1}{8\pi} \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{m}{\varkappa}} \frac{1}{A_1(5)}$$

$$\boxed{b_1 = -\frac{1}{16\pi} \sqrt{\frac{2m}{\varkappa}} \frac{1}{A_1(5)} \quad , A_1(5) = 0.422\ldots}$$

Avec ce résultat, le coefficient de viscosité volumique avec

$$a_0^{(4)}(m,\varkappa) = b_0^{(5)}(m,\varkappa) = b_1 = -\frac{1}{16\pi}\sqrt{\frac{2m}{\varkappa}}\,\frac{1}{A_1(5)} \quad , \quad A_1(5) = 0.422\ldots$$

devient:

$$\boxed{\zeta(r,t) = +\,\frac{5}{6}\,k_B\,\frac{1}{16\pi}\sqrt{\frac{2m}{\varkappa}}\,\frac{1}{A_1(5)}\left(3\,\frac{\nabla_r T(r,t)\cdot v(r,t)}{\nabla_r \cdot v(r,t)} + 2T(r,t)\right)}$$

Il faut encore vérifier que le calcul à l'ordre ε^1 est bien correct.

Refaisons les calculs du Chapman pour comprendre le mécanisme

$$H_{12}(\chi) = \pi^{3/2}\sqrt{M_1M_2}\, e^{-j_{12}g^2}\, i_{12}^{-5/2}\left(\frac{3}{2} + (1-j_{12}-\cos\chi)g^2\right)$$

Chgt. de variables:

$$Y_{12} = M_2 S + M_1 t$$
$$Z_{12} = 2M_1M_2\, st\,(1-\cos\chi)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{i_{12}}{ST} = \dfrac{1-Y_{12}}{st} \\ j_{12} = \dfrac{1-Z_{12}}{1-Y_{12}} \end{cases} \qquad \frac{\partial j_{12}}{\partial Y_{12}} = \frac{j_{12}}{1-Y_{12}}$$

Ainsi:

$$\left(\frac{ST}{st}\right)^{5/2}\frac{1}{\sqrt{M_1M_2}}\frac{1}{\pi^{3/2}}H_{12}(\chi) = \left(\frac{ST}{st}\right)^{5/2}\cancel{\frac{1}{\sqrt{M_1M_2}}}\cancel{\frac{1}{\pi^{3/2}}}\cancel{\pi^{3/2}}\cancel{\sqrt{M_1M_2}}\, e^{-j_{12}g^2}\, i_{12}^{-5/2}\left(\frac{3}{2} + (1-j_{12}-\cos\chi)g^2\right)$$

$$= \cancel{\left(\frac{ST}{st}\right)^{5/2}}\cancel{\left(\frac{st}{ST}\right)^{5/2}}(1-Y_{12})^{-5/2}\left(\frac{3}{2} + (1-j_{12}-\cos\chi)g^2\right)e^{-j_{12}g^2}$$

$$= \frac{3}{2}e^{-j_{12}g^2}(1-Y_{12})^{-5/2} + e^{-j_{12}g^2}(1-Y_{12})^{-5/2}(1-j_{12}-\cos\chi)g^2$$

$$= \frac{3}{2}e^{-j_{12}g^2}(1-Y_{12})^{-5/2} - j_{12}\, e^{-j_{12}g^2}(1-Y_{12})^{-5/2}g^2 + e^{-j_{12}g^2}(1-Y_{12})^{-5/2}(1-\cos\chi)g^2$$

$$= \underbrace{\frac{3}{2}(1-Y_{12})^{-5/2}e^{-j_{12}g^2}}_{=\left(\frac{\partial}{\partial Y_{12}}(1-Y_{12})^{-3/2}\right)e^{-j_{12}g^2}} + \underbrace{(1-Y_{12})^{-5/2}e^{-j_{12}g^2}(-j_{12}g^2)}_{=(1-Y_{12})^{-3/2}e^{-j_{12}g^2}\underbrace{\frac{\partial}{\partial Y_{12}}(-j_{12}g^2)}_{=\frac{-j_{12}g^2}{1-Y_{12}}}} + e^{-j_{12}g^2}(1-Y_{12})^{-5/2}(1-\cos\chi)g^2$$

$$= (1-Y_{12})^{-3/2}\frac{\partial}{\partial Y_{12}}e^{-j_{12}g^2}$$

$$= \frac{\partial}{\partial Y_{12}}\left((1-Y_{12})^{-3/2}e^{-j_{12}g^2}\right) + e^{-j_{12}g^2}(1-Y_{12})^{-5/2}(1-\cos\chi)g^2$$

Or par définition des polyn. de Sonine

$$e^{-j_{12}g^2}(1-Y_{12})^{-5/2} = e^{-g^2}\sum_{rn}\frac{(Z_{12}g^2)^r}{r!}Y_{12}^n\, S_{r+3/2}^{(n)}(g^2)$$

$$\frac{\partial}{\partial Y_{12}}\left(e^{-j_{12}g^2}(1-Y_{12})^{-3/2}\right) = e^{-g^2}\sum_{rn}\frac{(Z_{12}g^2)^r}{r!}(n+1)\,Y_{12}^n\, S_{r+1/2}^{(n+1)}(g^2)$$

ainsi en remplaçant les valeurs de Y_{12} et Z_{12} on trouve:

$$\left(\frac{ST}{st}\right)^{5/2}\frac{1}{\sqrt{M_1M_2}}\frac{1}{\pi^{3/2}}H_{12}(\chi) = e^{-g^2}\sum_{rn}\left(2M_1M_2\,st\,(1-\cos\chi)\right)^r\frac{g^{2r}}{r!}(M_2s+M_1t)^n \times$$
$$\times\left((n+1)S_{r+1/2}^{(n+1)}(g^2) + g^2(1-\cos\chi)S_{r+3/2}^{(n)}(g^2)\right).$$

en utilisant la relation binômiale

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

on peut finalement écrire la chose comme

$$\begin{cases} \left(\dfrac{ST}{st}\right)^{5/2}\dfrac{1}{\sqrt{M_1M_2}}\dfrac{1}{\pi^{3/2}}H_{12}(\chi) = e^{-g^2}\displaystyle\sum_{pqrn}\underbrace{A_{pqrn}}_{\text{coeff. indép } M_1,M_2}(M_2s)^p(M_1t)^q g^{2r}\cos^n\chi \\ \left[S_{3/2}^{(p)}(\mathcal{C}^2)\mathcal{C}_1, S_{3/2}^{(q)}(\mathcal{C}^2)\mathcal{C}_2\right]_{12} = \left(\dfrac{ST}{st}\right)^{5/2}\dfrac{1}{\pi^3}\displaystyle\int d^3g\, d\varepsilon\, db\; g\, b\,\left(H_{12}(0) - H_{12}(\chi)\right) \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ que l'on reformule en terme des $\Omega_{12}^{(e)}(r)$. Le passage difficile est $\ell\ell$. Qu'y a-t-on fait? On a mis en évidence les polynômes de Sonine. C'est ce que je dois arriver à faire.

- la suite: • mette en évidence $\Omega_{12}^{(e)}(r) = \pi^{1/2}\iint dg\,db\; g\,b\, e^{-g^2}g^{2r+2}(1-\cos^e\chi)$
  • trouver explicitement les A_{pqrn} (facile)

  $\rightarrow$ on voit que pour mettre en évidence $\Omega_{12}^{(e)}(r)$, on doit avoir des termes

  $$e^{-g^2}g^{2r+2}(1-\cos^e\chi)$$

  en évidence qui multiplie tout

5.5. Ordre ε^k, $k \geq 2$: 5.5.1. Résolution de l'équation

à laterey

①

L'équation à résoudre est

$$\frac{1}{\tilde{T}} \mathbf{w} \cdot \tilde{\mathbf{F}} = L[\Psi^{(2)}] ,$$

$$\begin{Bmatrix} a^{\text{moi}} \\ b \end{Bmatrix} = -\frac{1}{n \lambda_{mfp}} \sqrt{\frac{k_B T_0}{m}} \begin{Bmatrix} a^{\text{livre}} \\ b \end{Bmatrix}$$

donc on peut essayer une solution de la forme

$$\Psi^{(2)}(x, u; \{\tau\}) = \frac{\tilde{F}(x)}{\tilde{T}(x,\tau)} A^{(2)}(W) \cdot W ,$$

de sorte que l'équation à résoudre soit

$$L[A^{(2)}(W) W] = W . \qquad (*)$$

~~Par conséquent~~

$$\cancel{A^{(2)}(W) \propto S_m^{(0)}(W^2/2\tilde{T})} \quad \cancel{\text{car selon } L[S_m^{(0)}(W) W] \propto W \text{ et donc}}$$

$$\cancel{A^{(2)}(W) = a_0 S_m^{(0)}(W^2/2\tilde{T})} .$$

~~Coefficient de conductivité~~

On se souvient des fonctions propres (3.16) de l'opérateur de collision

$$\varphi_{n\ell m}(X) \propto X^\ell S_{\ell+1/2}^{(n)}(X^2) ,$$

par conséquent

$$A^{(2)}(W) \cdot W \propto S_{3/2}^{(0)}(W^2/2\tilde{T}) \, W \propto \varphi_{11m}(W) ,$$

avec $S_{3/2}^{(0)}(W^2/2\tilde{T}) = O(W^0)$. Par conséquent, l'équation (*) est bien vérifiée, et on posera

$$A^{(2)}(W) = a_0^{(2)} S_{3/2}^{(0)}(W^2/2\tilde{T}) ,$$

donc

$$\boxed{\Psi^{(2)}(x, u; \tau) = \frac{\tilde{F}(x)}{\tilde{T}(x,\tau)} \cdot a_0^{(2)} S_{3/2}^{(0)}(W^2/2\tilde{T}) \, W} . \qquad (**)$$

~~Coefficient de conductivité thermique~~

avec $a_0 \in \mathbb{R}$ le coefficient à déterminer.

Coefficient de conductivité thermique (5.5.2)

La déviation $\Psi^{(2)}$ par rapport à l'ordre ε^1 n'ayant pas le gradient $\nabla_r T(r,t)$ en évidence, on voit qu'il sera difficile d'établir le lien avec la loi phénoménologique de Fourier pour en tirer le coefficient de conductivité thermique. Néanmoins, on va montrer en suivant la démarche exposée dans la section 5.3.2, que de toute façon la contribution au coefficient de conductivité thermique est nulle à cet ordre. En effet, en partant de la définition (1.22) adoptée à notre cas

$$j_q(r,t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3p \, \frac{p - mv}{m} \, \frac{(p-mv)^2}{2m} \, f_e(r,p,t) \, \Psi^{(2)}(r,p,t) ,$$

que l'on adimensionalise ~~suivant la démarche de comme dans la section 5.3.2~~ et procède comme exposé dans la section 5.3.2, on puis y insère ~~...~~ le développement $A^{(2)}(W) = \sum_{n \geq 0} a_n^{(2)} S_{3/2}^{(n)}\left(\frac{W^2}{2\tilde{T}}\right)$ ~~pour obtenir~~ obtient (5.46)

$$j_q(r,t) = -\frac{1}{3} \frac{(k_B T_0)^{3/2}}{m^{1/2}} \, n_0 \tilde{T} \sum_{n \geq 0} a_n I_n ,$$

avec

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^3} d^3w \; f_e(x, u; \{\tau\}) \; S_{3/2}^{(n)}\left(\frac{W^2}{2\tilde{T}}\right) W \, S_{3/2}^{(1)}\left(\frac{W^2}{2\tilde{T}}\right) W$$

$$= \frac{4}{\pi^{1/2}} \tilde{T} \tilde{n} \, \langle S_{3/2}^{(n)}(Y) \mid S_{3/2}^{(1)}(Y) \rangle_{L^2([0,\infty[\, , \, Y^{3/2} e^{-Y} dY)}$$

$$= \frac{15}{2} \tilde{T} \tilde{n} \, \delta_{n,1} .$$

(la condition pour réutiliser ces résultats ~~on peut le faire, car~~ est que $\Psi^{(2)}$ ait la même forme que $\Phi^{(1)}$ dans la section 5.3.2, c'est-à-dire que $\Psi^{(2)}$ ~~est~~ soit proportionnel à $S_{3/2}^{(n)} \cdot W$ ~~avec des~~)

Ainsi

$$j_q(r,t) = \cancel{\ldots} - \frac{5}{2} \frac{(k_B T_0)^{3/2}}{m^{1/2}} \, n_0 \tilde{T}^2 \tilde{n} \underbrace{\sum_{n \geq 0} a_n \delta_{n,1}}_{= a_1 = 0} = 0$$

qui est nul car par (**) seul ~~$a_0 \neq 0$. On a ainsi montré~~ a_0 est susceptible d'être ~~...~~ non nul. On a ainsi montré que le courant de chaleur, par conséquent le coefficient de conductivité thermique, est le même à l'ordre ε^2 qu'à l'ordre ε^1 :

$$\cancel{\lambda^{(2)} = \lambda^{(1)}} \quad \boxed{\lambda^{(2)}(r,t) = \lambda^{(1)}(r,t).}$$

5.5.3 : Coefficient de viscosité

$\boxed{\text{à calexer}}$

La déviation $\Psi^{(2)}$ par rapport à l'ordre ε^1 n'ayant pas le tenseur des contraintes en évidence, on voit que dans ce cas il sera aussi difficile d'établir le lien avec la loi phénoménologique. En reprenant l'expression (**) adaptée à notre cas ona.

$$\Delta P_{ij}^{(2)}(r,t) = k_B T_0 n_0 \int_{\mathbb{R}^3} d^3w \; w_i w_j \; f_e(x,u;\{\tau\}) \, \Psi^{(2)}(x,u;\{\tau\})$$

$$= k_B T_0 n_0 \frac{1}{\tilde{T}} \sum_{k=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3w \; w_i w_j \; f_e(x,u;\{\tau\}) \; F_k(x) \; a_0^{(2)} \; S_{3/2}^{(0)}\left(\frac{w^2}{2\tilde{T}}\right) w_k$$

$$= \frac{k_B T_0 n_0}{\tilde{T}} a_0^{(2)} \sum_{k=1}^{3} F_k(x) \int_{\mathbb{R}^3} d^3w \; w_i w_j w_k \; f_e(x,u;\{\tau\})$$

$$= \frac{k_B T_0 n_0}{\tilde{T}} \frac{\tilde{n}}{(2\pi\tilde{T})^{3/2}} a_0^{(2)} \sum_{k=1}^{3} F_k(x) \int_{\mathbb{R}^3} d^3w \; w_i w_j w_k \; \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{w^2}{\tilde{T}}\right) \qquad ; x = w/\sqrt{2\tilde{T}}$$
$$d^3w = (2\tilde{T})^{3/2} d^3x$$

$$= \frac{k_B T_0 n_0}{\tilde{T}} \frac{\tilde{n}}{(2\pi\tilde{T})^{3/2}} a_0^{(2)} \sum_{k=1}^{3} F_k(x) \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \; (2\tilde{T})^{3/2} \; (2\tilde{T})^{3/2} \; x_i x_j x_k \; \exp(-x^2)$$

$$= \frac{k_B T_0 n_0}{\tilde{T}} \frac{\tilde{n}}{\pi^{3/2}} (2\tilde{T})^{3/2} a_0^{(2)} \sum_{k=1}^{3} F_k(x) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \; x_i x_j x_k \; \exp(-x^2)}_{:= I_{kijk}}$$

Pour des raisons de symétrie, $I_k = 0$. Preuve : commençons par le cas $i \neq j$.

Pour des raisons de symétrie, les termes $k \neq \{i,j\}$ sont nuls, donc il ne reste que les deux possibilités $k=i$ ou $k=j$, qui toutes deux donnent la même contribution, d'où

$$I_k = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \; x_i^2 x_j \; e^{-x^2} \cdot (\delta_{k,i} + \delta_{k,j})$$

$$\overset{i\neq j}{=} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dx_i \; x_i^2 e^{-x_i^2}}_{=\sqrt{\pi}/2} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dx_j \; x_j \; e^{-x_j^2}}_{=0} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dx \; e^{-x^2}}_{=\sqrt{\pi}} \; (\delta_{k,i} + \delta_{k,j})$$

$$= 0.$$

Ainsi $\Delta P_{ij}^{(2)}(r,t) = 0$, et le coefficient de viscosité à l'ordre ε^2 est le même qu'à l'ordre ε^1 :

$$\boxed{\eta^{(2)}(r,t) = \eta^{(1)}(r,t)}$$

Si $i=j$, alors

$$I_k = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dx_i \; x_i^3 \; e^{-x_i^2}}_{=0} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^2} dx \; e^{-x^2}\right)^2}_{=\pi} = 0.$$

$i \neq j \neq k$: I_{kijk}

$i=j$ ou $i=k$ ou $j=k$: I_{iik}

$i=j=k$: I_{kkk}

Le tenseur de pression $P_{ij}(r,t)$ à l'ordre ε^0 est défini microscopiquement par (1.21), c'est-à-dire

$$P_{ij}^{(0)}(r,t) = p\cdot\mathbb{1} + \int_{\mathbb{R}^3} d^3p\, \frac{(p-mv)_i\,(p-mv)_j}{m}\, f_e(r,p,t)\, \Phi^{(0)}(r,p,t)\,, \qquad (*)$$

avec p la pression hydrostatique qui ne fait intervenir que la distribution d'équilibre $f_e(r,p,t)$ donnée par (1.2)

$$p = \int_{\mathbb{R}^3} d^3p\, \frac{(p-mv)_i\,(p-mv)_j}{m}\, f_e(r,p,t)\,.$$

Nous ne nous intéressons par conséquent pas à p, qui est ainsi trivialement définie, et étudions ainsi la pression hydrodynamique

$$\Delta P_{ij}^{(0)}(r,t) = P_{ij}^{(0)}(r,t) - p\cdot\mathbb{1}\,.$$

On va voir que dans le calcul de $\Delta P_{ij}^{(0)}$, n'intervient en général que le coefficient b_0 du développement (5.32).
Pour ce faire, on commence par mettre en évidence les unités de $(*)$ en utilisant les définitions de la section 2.1.3 (comme lors du calcul du coefficient de conductivité thermique) :

$$f_e(r,p,t) = \frac{n_0}{(mk_BT_0)^{3/2}}\, f_e(x,u;\{\tau\}) \qquad ; \; f_e(x,u;\{\tau\}) = \frac{\tilde n(x,\tau)}{(2\pi\,\tilde T(x,\tau))^{3/2}} \exp\left(-\tfrac{1}{2} w^2/\tilde T(x,\tau)\right)$$

$$\Phi^{(0)}(r,p,t) = \Phi^{(0)}(x,u;\{\tau\})$$

$$w = u - c(x,\tau)$$

$$p = \sqrt{mk_BT_0}\, u \quad \Longrightarrow d^3p = (mk_BT_0)^{3/2}\, d^3u$$

$$v = \sqrt{\frac{k_BT_0}{m}}\, c \quad \Longrightarrow d^3v = \left(\frac{k_BT_0}{m}\right)^{3/2} d^3c$$

$$\Delta P_{ij}^{(0)}(r,t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3w\, \cancel{(mk_BT_0)^{3/2}}\, \sqrt{mk_BT_0}\,\frac{1}{m}(u-c)_i\, \sqrt{mk_BT_0}\,(u-c)_j\, \frac{n_0}{\cancel{(mk_BT_0)^{3/2}}}\, f_e(x,u;\{\tau\})\, \Phi^{(0)}(x,u;\{\tau\})$$

$$= k_BT_0 n_0 \int_{\mathbb{R}^3} d^3w\; w_i w_j\, f_e(x,u;\{\tau\})\, \Phi^{(0)}(x,u;\{\tau\})\,. \qquad (**)$$

533star2

On a :

$$\Phi^{(0)}(x,u;\{\tau\}) = \overbrace{A(w)\, w\, \frac{\nabla_x \tilde T}{\tilde T}}^{\text{ne contribue pas à la viscosité}} + B(w)\, \frac{1}{\tilde T}\left(ww - 1/3\, w^2\mathbb{1}\right) : \Lambda^D,$$

~~avec~~ $\cancel{\Lambda^D = 1/2\left(\frac{\partial c_i}{\partial x_j} + \frac{\partial c_j}{\partial x_i}\right),\ x = 1/\lambda_{mfp}\, r,\ c = \sqrt{m/k_BT_0}\, v,\ A:B = \sum_{ij} A_{ij}B_{ji}}$. Ainsi en étudiant le tenseur complet et non plus seulement ses composantes i,j :

$$\Delta P^{(0)}(r,t) = \frac{k_BT_0n_0}{\tilde T}\int_{\mathbb{R}^3} d^3w\;w\,w\; f_e(x,u;\{\tau\})\, B(w)\,\left(ww - 1/3\, w^2\mathbb{1}\right) : \Lambda^D. \qquad (2)$$

Introduisons certaines notations. Soit $A \in M_n(K)$ une matrice $n\times n$ d'éléments a_{ij}, alors la matrice transposée de A sera notée A^t. On définit la matrice de trace nulle $\overset{\circ}{A}$ par

$$\overset{\circ}{A} = A - \tfrac{1}{3}\mathrm{Tr}(A)\,\mathbb{1} \qquad \text{\stackrel\{\circ\}\{A\}}$$

On définit la matrice symétrisée $\overline{\overline{A}}$ par

$$\overline{\overline{A}} = \tfrac{1}{2}(A + A^t). \qquad \text{\overline\{\overline\{A\}\}}$$

De ces deux définitions on conclut que

$$\overset{\circ}{\overline{\overline{A}}} = \overline{\overline{A}} - \tfrac{1}{3}\mathrm{Tr}(A)\,\mathbb{1} \qquad \text{\stackrel\{\circ\}\{\overline\{\overline\{A\}\}\}} \qquad (2\text{bis})$$

Dans ces notations, l'équation (2) devient

$$\Delta P^{(0)}(r,t) = \frac{k_BT_0n_0}{\tilde T}\int_{\mathbb{R}^3} d^3w\;ww\; f_e(x,u;\{\tau\})\, B(w)\left(\overset{\circ}{ww} : \Lambda^D\right) \qquad (**)$$

Pour continuer, nous avons besoin du lemme suivant.

<u>Lemme</u> (Identité tensorielle). Supposons que $F(\|w\|)$ possède les propriétés de régularité nécessaire pour que les intégrales suivantes convergent, et supposons que Λ ne dépende pas de w, alors

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3w\; F(\|w\|)\; ww\; \left(\overset{\circ}{ww} : D\right) = \frac{1}{5}\,\overset{\circ}{\overline{\overline{D}}} \int_{\mathbb{R}^3} d^3w\; F(\|w\|)\; \left(\overset{\circ}{ww} : \overset{\circ}{ww}\right).$$

<u>Preuve</u> (Lemme). Commençons par établir les deux relations suivantes : ~~soit~~ soient $A, B \in M_3(K)$, alors

$$\overset{\circ}{A} : \overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{A} : B = A : \overset{\circ}{B} \qquad (3)$$

$$\cancel{\overline{\overline{A}} : \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A}} : B = A : \overline{\overline{B}}} \qquad (4)$$

(3) s'établit en remarquant que

$$\begin{aligned}\mathring{A} &= A - 1/3\,\mathrm{Tr}(A)\,\mathbb{1}\\ &= A - 1/3\,\mathbb{1}\sum_{ij=1}^{3}\delta_{ij}A_{ji}\\ &= A - 1/3\,\mathbb{1}\,(\mathbb{1}:A)\,,\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}\mathring{A}:\mathring{B} &= \mathring{A}:\left[B - 1/3\,\mathbb{1}(\mathbb{1}:B)\right]\\ &= \mathring{A}:B - 1/3\,(\mathring{A}:\mathbb{1})(\mathbb{1}:B)\\ &= \mathring{A}:B - 1/3\,\underbrace{\mathrm{Tr}(\mathring{A})}_{=0}\,\underbrace{\mathrm{Tr}(\mathring{B})}_{=0}\\ &= \mathring{A}:B\,,\end{aligned}$$

d'où par symétrie

$$\mathring{A}:\mathring{B} = \mathring{A}:B = A:\mathring{B}\,,$$

ce qui prouve (3).

(4) s'établit en remarquant que par définition

$$A:B = \sum_{ij=1}^{3} A_{ij}B_{ji} = \sum_{ij=1}^{3} B_{ij}A_{ji} = B:A\,,$$

donc $A^t:B^t = A:B$ et en utilisant encore $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A}}^t$ on a

$$\begin{aligned}\overline{\overline{A}}:\overline{\overline{B}} &= 1/2\,(A^t + A):\overline{\overline{B}}\\ &= 1/2\,\underbrace{A^t:\overline{\overline{B}}}_{=A:\overline{\overline{B}}^t} + 1/2\,A:\overline{\overline{B}}\\ &= 1/2\,A:\overline{\overline{B}} + 1/2\,A:\overline{\overline{B}}\\ &= A:\overline{\overline{B}}\,,\end{aligned}$$

d'où par symétrie

$$\overline{\overline{A}}:\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A}}:B = A:\overline{\overline{B}}\,,$$

ce qui prouve (4).

Avec (3) et (4) on en tire

$$\mathring{A}:B = \mathring{A}:\overline{\overline{B}} = A:\mathring{\overline{\overline{B}}}\,,$$

et donc en partant du membre de gauche du lemme

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3w\; F(\|w\|)\; ww\,(\mathring{ww}:D) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3w\; F(\|w\|)\; ww\,(ww:\mathring{\overline{\overline{D}}})\,. \qquad (6)$$

Étudions séparément les parties diagonales et non diagonales de cette dernière expression. Un terme diagonal sera de la forme

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} d^3w\; F(\|w\|)\; w_k^2\,(ww:\mathring{\overline{\overline{D}}}) &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3w\; F(\|w\|)\; w_k^2 \sum_{ij=1}^{3} w_i w_j\, \mathring{\overline{\overline{D}}}_{ji}\\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3w\; F(\|w\|)\; w_k^2 \sum_{i=1}^{3} w_i^2\, \mathring{\overline{\overline{D}}}_{ii}\,, \qquad (7)\end{aligned}$$

car les termes impaires en w_i donnent une contribution nulle par symétrie. Pour calculer cette intégrale, en passant en coordonnées sphériques on a pour $i=k$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} d^3w\; F(\|w\|)\; w_k^4\, \mathring{\overline{\overline{D}}}_{kk} &= \mathring{\overline{\overline{D}}}_{kk}\int_0^\infty dw\; F(\|w\|)\; w^4 \quad w^2 \underbrace{\int_0^\pi d\theta\, \cos^4\theta \sin\theta}_{=\frac{1}{5}\int_0^\pi d\theta\,\sin\theta} \int_0^{2\pi} d\varphi\\ &= \frac{1}{5}\,\mathring{\overline{\overline{D}}}_{kk}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \underbrace{dw\; d\theta\, d\varphi\; w^2 \sin\theta}_{d^3w}\; F(\|w\|)\, w^4\\ &= \frac{1}{5}\,\mathring{\overline{\overline{D}}}_{kk}\int_{\mathbb{R}^3} d^3w\; F(\|w\|)\, w^4\,.\end{aligned}$$

De façon similaire pour $i \neq k$, on peut montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3w \; F(\|w\|) \, w_k^2 w_i^2 \, \mathring{\bar{\bar{D}}}_{ii} = \frac{1}{15} \, \mathring{\bar{\bar{D}}}_{ii} \int_{\mathbb{R}^3} d^3w \; F(\|w\|) \, w^4 . \qquad (8)$$

Ainsi les termes diagonaux (7) prennent la forme pour $k=1$ par exemple

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3w \; F(\|w\|) \, w_k^2 \, (ww : \mathring{\bar{\bar{D}}}) = \left(\frac{1}{5} \mathring{\bar{\bar{D}}}_{11} + \frac{1}{15} \mathring{\bar{\bar{D}}}_{22} + \frac{1}{15} \mathring{\bar{\bar{D}}}_{33} \right) \int_{\mathbb{R}^3} d^3w \; F(\|w\|) \, w^4$$

$$= \left(\frac{2}{15} \mathring{\bar{\bar{D}}}_{11} + \frac{1}{15} \underbrace{Tr(\mathring{\bar{\bar{D}}})}_{=0} \right) \int_{\mathbb{R}^3} d^3w \; F(\|w\|) \, w^4 . \qquad (9)$$

Les éléments non diagonaux de (6) sont de la forme pour $i \neq j$ avec $\mathring{\bar{\bar{\Lambda}}}_{ij} = \mathring{\bar{\bar{\Lambda}}}_{ji}$

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3w \; F(\|w\|) \, w_i w_j \, (ww : \mathring{\bar{\bar{D}}}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3w \; F(\|w\|) \, w_i w_j \sum_{k\ell=1}^{3} w_k w_\ell \, \mathring{\bar{\bar{D}}}_{\ell k}$$

$$= \underbrace{3 \int_{\mathbb{R}^3} d^3w \; F(\|w\|) \, w_i w_j \; w_1^2 \, \mathring{\bar{\bar{D}}}_{11}}_{=0 \text{ par symétrie}}$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^3} d^3w \; F(\|w\|) \, w_i w_j \sum_{k \neq \ell}^{3} w_k w_\ell \, \mathring{\bar{\bar{D}}}_{\ell k}$$

$$= 2 \int_{\mathbb{R}^3} d^3w \; F(\|w\|) \, w_i w_j \left(w_1 w_2 \, \mathring{\bar{\bar{D}}}_{21} + w_1 w_3 \, \mathring{\bar{\bar{D}}}_{31} + w_2 w_3 \, \mathring{\bar{\bar{D}}}_{32} \right) .$$

Or dans cette dernière expression, $\{i,j\} \in \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$, d'où pour des raisons de symétrie un seul des trois termes de l'intégrand donne une contribution non nulle

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3w \; F(\|w\|) \, w_i w_j \, (ww : \mathring{\bar{\bar{D}}}) = 2 \, \mathring{\bar{\bar{D}}}_{ij} \int_{\mathbb{R}^3} d^3w \; F(\|w\|) \, w_i^2 w_j^2 ,$$

$$\overset{(8)}{=} \frac{2}{15} \, \mathring{\bar{\bar{D}}}_{ij} \int_{\mathbb{R}^3} d^3w \; F(\|w\|) \, w^4 . \qquad (10)$$

Ainsi, en insérant les élément diagonaux (9) et non diagonaux (10) dans (6)

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3w \; F(\|w\|) \, ww \, (\mathring{ww} : D) = \frac{2}{15} \, \mathring{\bar{\bar{D}}} \int_{\mathbb{R}^3} d^3w \; F(\|w\|) \, w^4 . \qquad (11)$$

Finalement, remarquons que

$$\mathring{ww} : \mathring{ww} = \mathring{ww} : ww$$

$$= \left(ww - 1/3 \, \mathbb{1} \, (\mathbb{1} : ww) \right) : ww$$

$$= ww : ww - 1/3 \, \mathbb{1} \underbrace{(\mathbb{1} : ww)}_{= \sum_{i=1}^{3} w_i^2} : ww$$

$$= \sum_{ij=1}^{3} w_i w_j \, w_j w_i - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} w_i^2 \underbrace{(\mathbb{1} : ww)}_{= \sum_{j=1}^{3} w_j^2}$$

$$= \sum_{ij=1}^{3} \left(w_i^2 w_j^2 - \frac{1}{3} w_i^2 w_j^2 \right)$$

$$= \frac{2}{3} \; w^4 , \qquad (11*)$$

donc (11) devient

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3w \; F(\|w\|) \, ww \, (\mathring{ww} : D) = \frac{1}{5} \, \mathring{\bar{\bar{D}}} \int_{\mathbb{R}^3} d^3w \; F(\|w\|) \; (\mathring{ww} : \mathring{ww})$$

ce qui achève la preuve. #

En utilisant ce lemme à (**) on a

$$\Delta p^{(0)}(r,t) = \frac{k_B T_0 n_0}{5\tilde{T}} \overset{\circ}{\underline{\underline{\mathbf{D}}}} \int_{\mathbb{R}^3} d^3w \; f_e(x,u;[\tau]) \, B(W) \; \overset{\circ}{WW} : \overset{\circ}{WW} \; .$$

Insérant le développement (5.32)

$$B(W) = \sum_{n\geq 0} b_n S^{(n)}_{5/2}\left(\frac{W^2}{2\tilde{T}}\right)$$

ainsi que

$$\overset{\circ}{WW} = \frac{1}{S^{(0)}_{5/2}\left(\frac{W^2}{2\tilde{T}}\right)} S^{(0)}_{5/2}\left(\frac{W^2}{2\tilde{T}}\right) \overset{\circ}{WW} \; , \qquad S^{(0)}_{5/2}\left(\frac{W^2}{2\tilde{T}}\right) = 1 \; ,$$

Re-vérifier depuis ici

on obtient

$$\Delta p^{(0)}(r,t) = \frac{k_B T_0 n_0}{5\tilde{T}} \overset{\circ}{\underline{\underline{\mathbf{D}}}} \sum_{n\geq 0} b_n I_n \; ,$$

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^3} d^3w \; f_e(x,u;[\tau]) \, S^{(n)}_{5/2}\left(\frac{W^2}{2\tilde{T}}\right) \overset{\circ}{WW} : S^{(0)}_{5/2}\left(\frac{W^2}{2\tilde{T}}\right) \overset{\circ}{WW} \; .$$

I_n peut être calculé explicitement avec (11*) et en procédant de façon similaire au calcul effectué par le coefficient de conduction thermique.

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^3} d^3w \; f_e(x,u;[\tau]) \, S^{(n)}_{5/2}(W^2/2\tilde{T}) \, S^{(0)}_{5/2}(W^2/2\tilde{T}) \; \frac{2}{3} W^4$$

$$= \frac{2}{3} \frac{\tilde{n}}{(2\pi\tilde{T})^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} d^3w \; e^{-\frac{1}{2}W^2/\tilde{T}} \, S^{(n)}_{5/2}(W^2/2\tilde{T}) \, S^{(0)}_{5/2}(W^2/2\tilde{T}) \, W^4 \qquad , \; x = W/\sqrt{2\tilde{T}} \; , \; d^3x = d^3w/(2\tilde{T})^{3/2}$$

$$= \frac{2}{3} \frac{\tilde{n}}{(2\pi\tilde{T})^{3/2}} (2\tilde{T})^{3/2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \; e^{-x^2} S^{(n)}_{5/2}(x^2) \, S^{(0)}_{5/2}(x^2) \, x^4 \, (2\tilde{T})^2$$

$$= \frac{2}{3} \frac{\tilde{n}}{(2\pi\tilde{T})^{3/2}} (2\tilde{T})^{3/2} (2\tilde{T})^2 \int_0^\infty dx \; e^{-x^2} x^2 \, S^{(n)}_{5/2}(x^2) \, S^{(0)}_{5/2}(x^2) \, x^4 \underbrace{\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \; \sin\theta}_{=4\pi} \qquad ; \; y = x^2 \; , \; dy = 2x\,dx$$

$$= \frac{2}{3} \frac{\tilde{n}}{\pi^{3/2}} 4\tilde{T}^2 4\pi \; \frac{1}{2} \int_0^\infty dy \; \underbrace{\frac{1}{\sqrt{y}} y \, y^2}_{y^{6/2-1/2}} e^{-y} S^{(n)}_{5/2}(y) \, S^{(0)}_{5/2}(y)$$

$$= \frac{16}{3} \frac{\tilde{n}}{\pi^{1/2}} \tilde{T}^2 \left\langle S^{(n)}_{5/2} \middle| S^{(0)}_{5/2} \right\rangle_{L^2([0,\infty[,\, y^{5/2} e^{-y} dy)}$$

$$= \frac{16}{3} \frac{\tilde{n}}{\pi^{1/2}} \tilde{T}^2 \frac{\Gamma(5/2+0+1)}{0!} \delta_{n,0} \qquad ; \; \Gamma(5/2+1) = \Gamma(1/2+3) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^3}(2\cdot 3-1)!!$$

$$= \frac{16}{3} \frac{\tilde{n}}{\cancel{\sqrt{\pi}}} \tilde{T}^2 \frac{\cancel{\sqrt{\pi}}}{8} 1\cdot 3\cdot 5 \; \delta_{n,0}$$

$$= \frac{2}{3}\cdot 15 \; \tilde{n}\tilde{T}^2 \delta_{n,0}$$

$$= 10 \, \tilde{n}\tilde{T}^2 \delta_{n,0} \quad ✓$$

Ainsi (~~avec $\mathbf{D} = 1/2\left(\frac{\partial c_i}{\partial x_j} + \frac{\partial c_j}{\partial x_i}\right)$, $x = 1/\lambda_{mfp} r$, $c = \sqrt{m/k_B T_0}\, v$~~), on a :

$$\Delta p^{(0)}(r,t) = \frac{k_B T_0 n_0}{5\tilde{T}} \sum_{n\geq 0} b_n \; 10 \, \tilde{n}\tilde{T}^2 \delta_{n,0} \; \overset{\circ}{\underline{\underline{\mathbf{D}}}}$$

$$= \frac{2 \, k_B T_0 n_0}{\cancel{\tilde{T}}} \tilde{n}\cancel{\tilde{T}}^2 \, b_0 \overset{\circ}{\underline{\underline{\mathbf{D}}}}$$

$$= 2 \, T n k_B \, b_0 \overset{\circ}{\underline{\underline{\mathbf{D}}}}$$

$$= 2n k_B T_0 \, b_0 \overset{\circ}{\underline{\underline{D}}} \quad ✓$$

$$\left(\sigma^{(0)} = \frac{k_B T_0 n_0}{5\cancel{\tilde{T}}} \overset{\circ}{\bar{D}} \, b_0 \, 10 \, \tilde{n}\tilde{T}^2 = 2 n k_B T \, b_0 \overset{\circ}{\bar{\bar{D}}} \right)$$

et $\dfrac{\partial c_i}{\partial x_j} = \sqrt{\dfrac{m}{k_B T_0}} \, \lambda_{mfp} \dfrac{\partial v_i}{\partial r_j}$ donc $\mathbf{D} = \sqrt{\dfrac{m}{k_B T_0}} \, \lambda_{mfp} \, \mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{\Lambda} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial r_j} + \dfrac{\partial v_j}{\partial r_i}\right)$, ainsi

$$\Delta P^{(0)}(r,t) = \frac{2 T_0 n k_B}{} \sqrt{\frac{m}{k_B T_0}}\, \lambda_{mfp}\, b_0\, \overset{\circ}{\overline{\Lambda}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{m k_B}{T_0}}\, \lambda_{mfp}\, n T\, b_0\, \overset{\circ}{\overline{\Lambda}} \qquad (1\alpha)$$

Or l'expression (1.19) pour la viscosité macroscopique est

$$\Delta P^{(0)}(r,t) = -2\eta^{(0)}\Big(\Lambda - 1/3\, \mathbb{1}\, \big(\underbrace{\nabla_r \cdot v(r,t)}_{=\mathrm{Tr}(\Lambda)}\big)\Big) = -2\eta^{(0)}\overset{\circ}{\overline{\Lambda}}\,, \qquad (1b)$$

d'où par comparaison de (1α) et (1β)

$$\eta^{(0)}_{(r,t)} = \sqrt{\frac{m k_B}{T_0}}\, \lambda_{mfp}\, n T\, b_0$$

Le coefficient b_0, défini comme la projection de la solution sur le polynôme de Sonine $S^{(0)}_{5/2}(w^2/2\tilde{T})$, s'obtient par formules de quadrature. \cite{Chapman} en donne l'expression

$$b_0 = \frac{1}{3\pi}\sqrt{\frac{2k_BT_0}{\kappa}}\,\frac{1}{A_2(5)}\,\frac{1}{\lambda_{mfp}}\,\frac{1}{n}$$

de sorte que

$$\boxed{\eta^{(0)}_{(r,t)} = \frac{k_B T(r,t)}{3\pi}\sqrt{\frac{2m}{\kappa}}\,\frac{1}{A_2(5)}}\,.$$

ok : vérifié.

Il s'agit de l'expression que l'on peut retrouver dans la littérature (voir [CC], [Kr]). Les valeurs de λ et η ~~obtenues~~ ainsi obtenues sont en très bon accord avec l'expérience (voir Bern p. 111 et 112).

5.4. Ordre ε^1 : 5.4.1 : Résolution de l'équation et coefficients de transport

$\boxed{\text{à LaTeX-er}}$

L'équation à résoudre est

$$u\cdot\frac{\nabla_x\tilde n}{\tilde n} - \frac{\nabla_x\tilde T}{\tilde T}\cdot\left(\frac{(u-c)^2}{2\tilde T}-\frac{3}{2}\right)u - \frac{1}{\tilde T}\sum_{ij=1}^{3} u_i(u-c)_j\frac{\partial c_j}{\partial x_i} = L[\Psi^{(1)}] \qquad (1)$$

Comme évoqué dans la section 5.2, cette dernière équation est assez similaire à celle de l'ordre ε^0 qui a pu être résolue. Néanmoins, ces différences ont pour conséquence qu'il n'est pas possible d'exploiter exactement les mêmes astuces de calcul. En effet ... ... p. 18.

Néanmoins, il est tout de même possible d'obtenir des résultats en mettant en évidence certains termes de (1). Soit $w=u-c$, alors (1) peut se réécrire comme

$$\underbrace{w\cdot\frac{\nabla_x\tilde n}{\tilde n}}_{\textcircled{1}} + \underbrace{c\cdot\frac{\nabla_x\tilde n}{\tilde n}}_{\textcircled{2}} \underbrace{- \frac{\nabla_x\tilde T}{\tilde T}\cdot\left(\frac{w^2}{2\tilde T}-\frac{3}{2}\right)w}_{\textcircled{3}} \underbrace{- \frac{\nabla_x\tilde T}{\tilde T}\cdot\left(\frac{w^2}{2\tilde T}-\frac{3}{2}\right)c}_{\textcircled{4}} \underbrace{- \frac{1}{\tilde T}\sum_{ij=1}^{3} w_i w_j\frac{\partial c_j}{\partial x_i}}_{= \underbrace{-\frac{1}{\tilde T}ww:D}_{\textcircled{5}}} \underbrace{- \frac{1}{\tilde T}\sum_{ij=1}^{3} c_i w_j\frac{\partial c_j}{\partial x_i}}_{\textcircled{6}} = L[\Psi^{(1)}]$$

Grâce à la linéarité de L, on peut traiter chaque terme ① à ⑥ séparément, avec solutions respectives $\Psi^{(1)}_{\textcircled{1}}$ à $\Psi^{(1)}_{\textcircled{6}}$. On calcule directement la contribution des différents termes aux coefficients de transport.

① La solution est de la forme \begin{enumerate} ou rien

$$\Psi^{(1)}_{\textcircled{1}} = \frac{\nabla_x\tilde n}{\tilde n}A_{\textcircled{1}}(w)\cdot w$$

En effet, l'équation pour $\Psi^{(1)}_{\textcircled{1}}$ devient alors

$$L[\Psi^{(1)}_{\textcircled{1}}] = L\left[\frac{\nabla_x\tilde n}{\tilde n}A_{\textcircled{1}}(w)\cdot w\right] = w\,\frac{\nabla_x\tilde n}{\tilde n}$$

$$\Rightarrow L[A_{\textcircled{1}}(w)w] = w,$$

d'où

$$A_{\textcircled{1}}(w) \propto S^{(0)}_{3/2} = 1 \qquad (2)$$

car dans ce cas $A_{\textcircled{1}}(w)w \propto \psi_{01m}(w)$ qui est fonction propre de l'opérateur de collision

$$L[\psi_{01m}(w)] \propto \psi_{01m}(w) \propto w.$$

En résumé, on a donc en écrivant $a_0^{\textcircled{1}}$ le coefficient de proportionnalité de (2),

$$\Psi^{(1)}_{\textcircled{1}} = \frac{\nabla_x\tilde n}{\tilde n}\,a_0^{\textcircled{1}}\,S^{(0)}_{3/2}\,w.$$

- Coefficient de conductivité thermique : on remarque que $\Psi^{(1)}_{\textcircled{1}} \propto S^{(0)}_{3/2}\cdot w$, comme lors de l'étude à l'ordre $\varepsilon^k, k\geq 2$. Or dans ce dernier cas on a établi que la contribution au coefficient de conductivité thermique est nulle, et par conséquent il en est de même ici.
- Coefficient de viscosité : comme $\Psi^{(1)}_{\textcircled{1}} \propto S^{(0)}_{3/2}\cdot w$, la discussion est la même que pour l'ordre $\varepsilon^k, k\geq 2$, et donc la contribution au coefficient de viscosité nulle.

② La solution est de la forme

$$\Psi^{(1)}_{②} = \frac{\nabla x \tilde{n}}{\tilde{n}} \cdot c \, A_{②}(W).$$

En effet, l'équation pour $\Psi^{(1)}_{②}$ est alors

$$L[\Psi^{(1)}_{②}] = L\left[\frac{\nabla x \tilde{n}}{\tilde{n}} \cdot c \, A_{②}(W)\right] = \frac{\nabla x \tilde{n}}{\tilde{n}} \cdot c$$

$$\Longrightarrow L[A_{②}(W)] = 1,$$

d'où

$$A_{②}(W) \propto S^{(0)}_{1/2} = 1$$

car dans ce cas $A_{②}(W) \propto \Psi_{000}(W)$ qui est fonction propre de l'opérateur de collision. En résumé, on a donc

$$\Psi^{(1)}_{②} = \frac{\nabla x \tilde{n}}{\tilde{n}} \cdot c \; a^{②}_0 \, S^{(0)}_{1/2}.$$

- Coefficient de conductivité thermique : par la définition (1.22) du courant d'énergie j_q et en introduisant les adimentionalisations (5.34) à (5.39) on a

$$
\begin{aligned}
j_q(r,t) &\propto \int_{\mathbb{R}^3} d^3u \; (u-c)(u-c)^2 \, f_e(x,u;\{\tau\}) \, \Psi^{(1)}_{②}(x,u;\{\tau\}) \\
&\propto \int_{\mathbb{R}^3} d^3u \; (u-c)(u-c)^2 \exp\left(-\frac{(u-c)^2}{2\tilde{T}}\right) \frac{\nabla x \tilde{n}(x,\tau)}{\tilde{n}(x,\tau)} \cdot c \; a^{②}_0 \, S^{(0)}_{1/2} \\
&\propto \int_{\mathbb{R}^3} d^3w \; w \, w^2 \, e^{-w^2} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Cette dernière expression est bien nulle par parité, et donc la contribution au coefficient de conductivité thermique est aussi nulle.

- Coefficient de viscosité : en reprenant l'expression (**) (calcul ter) adaptée à notre cas avec $S^{(0)}_m(x) = 1 \;\forall m$

$$
\begin{aligned}
\Delta P_{ij}(r,t) &= k_B T_0 n_0 \int_{\mathbb{R}^3} d^3w \; W_i W_j \; f_e(x,u;\{\tau\}) \, \Psi^{(1)}_{②}(x,u;\{\tau\}) \\
&= k_B T_0 n_0 \frac{\nabla x \tilde{n}}{\cancel{\tilde{n}}} \cdot c \; a^{②}_0 \int_{\mathbb{R}^3} d^3w \; W_i W_j \frac{\cancel{\tilde{n}}}{(2\pi\tilde{T})^{3/2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{W^2}{\tilde{T}}} \qquad ; \; x = W/\sqrt{2\tilde{T}} \; ; \; d^3w = (2\tilde{T})^{3/2} d^3x \\
&= k_B T_0 n_0 \, \nabla x \tilde{n} \cdot c \; a^{②}_0 \frac{1}{(2\pi\tilde{T})^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \; (2\tilde{T})^{3/2} (2\tilde{T}) \, x_i x_j \, e^{-x^2} \\
&= k_B T_0 n_0 \, \nabla x \tilde{n} \cdot c \; a^{②}_0 \frac{1}{\pi^{3/2}} \frac{2T}{T_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \; x_i x_j \, e^{-x^2} \\
&= \frac{2}{\pi^{3/2}} k_B T \, (\nabla x n \cdot c) \, a^{②}_0 \, I_{ij},
\end{aligned}
$$

avec

$$I_{ij} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \; x_i x_j \, e^{-x^2}$$

Si $i \neq j$, alors $I_{ij} = 0$ par parité. En effet, avec $i=1$ et $j=2$ par exemple

$$I_{12} = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dx_1 \, x_1 e^{-x_1^2}}_{=0} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dx_2 \, x_2 e^{-x_2^2}}_{=0} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dx_3 \, e^{-x_3^2}}_{=\sqrt{\pi}} = 0$$

Si $i=j$, alors pour $i=1$ par exemple

$$
\begin{aligned}
I_{11} &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \; x_1^2 \, e^{-x^2} \\
&= \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dx_1 \, x_1^2 e^{-x_1^2}}_{=\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} dx \, e^{-x^2}\right)^2}_{=\pi} \\
&= \tfrac{1}{2}\pi^{3/2}
\end{aligned}
$$

d'où

$$\Delta P_{ij}(r,t) = k_B T \, (\nabla x n \cdot c) \, a^{②}_0 \, \delta_{ij}$$

ainsi

$$P(r,t) = p \, \mathbb{1} + k_B T \, (\nabla x n \cdot c) \, a^{②}_0 \, \mathbb{1}.$$

Un nouveau terme diagonal apparaît, qui dépend du facteur $a^{②}_0$, du champ de vitesse moyenne $c(x,\tau)$ ainsi que du gradient de densité. Une connexion avec les lois macroscopiques n'est ici pas possible car le tenseur des contraintes n'apparait pas. Par contre, si $a_0^{②} = 0$ alors la pression (viscosité) n'est pas modifiée. On va montrer que tel est le cas. On sait que

$$\Psi^{(1)}_{②} = \frac{\nabla \times \tilde{n}}{\tilde{n}} \cdot c \qquad A_{②}(w)$$

avec $A_2(w) \propto \Psi_{000}$. Or Ψ_{000} est justement une fonction propre du noyau de L, ainsi $\Psi^{(1)}_{②} \in \mathrm{Ker}(L)$. Mais par le lemme 3.1, les coefficients correspondants aux fonctions propres du noyau de L sont nulles. Par conséquent $a_0^{(2)} = 0$ et $\Psi^{(1)}_{②}$ ne contribue pas à la viscosité.

③ Décomposons ce terme selon

$$-\frac{\nabla \times \tilde{T}}{\tilde{T}} \cdot \left(\frac{W^2}{2\tilde{T}} - \frac{3}{2}\right) W = \underbrace{-\frac{\nabla \times \tilde{T}}{\tilde{T}} \cdot \left(\frac{W^2}{2\tilde{T}} - \frac{5}{2}\right) W}_{③a} \underbrace{- \frac{\nabla \times \tilde{T}}{\tilde{T}} \cdot W}_{③b}$$

Le terme ③a est au signe près le même que celui de l'ordre ε^0, donc sa contribution ~~à la viscosité~~ au coefficient de conduction thermique est

$$\lambda^{(1)}_{③}(r,t) = -\lambda^{(0)}(r,t)$$

Pour ce qui est du terme ③b qui est linéaire en W, la discussion est en tout point similaire à celle du terme ①, et donc ne contribue pas aux coefficients de transport.

④ Décomposons ce terme selon

$$-\frac{\nabla \times \tilde{T}}{\tilde{T}}\left(\frac{W^2}{2\tilde{T}} - \frac{3}{2}\right) C = \underbrace{-\frac{\nabla \times \tilde{T}}{\tilde{T}} \cdot \frac{W^2}{2\tilde{T}} C}_{④a} \quad \underbrace{+ \frac{3}{2}\frac{\nabla \times \tilde{T}}{\tilde{T}} \cdot C}_{④b}$$

Le terme ④b, linéaire en C, est en tout point similaire au terme ②, par conséquent ne contribue pas aux coefficients de transport.

En ce qui concerne le terme ④a, la solution est de la forme

$$\Psi^{(1)}_{④} = -\frac{\nabla \times \tilde{T}}{2\tilde{T}^2} \cdot C \quad A_{④}(w)\, W^2.$$

En effet, l'équation pour $\Psi^{(1)}_{④}$ est alors

$$L[\Psi^{(1)}_{④}] = -L\left[\frac{\nabla \times \tilde{T}}{2\tilde{T}^2} \cdot C\, A_{④}(w) W^2\right] = -\frac{\nabla \times \tilde{T}}{2\tilde{T}^2} \cdot C \qquad W^2$$

$$\Longrightarrow L[A_{④}(w) W^2] = W^2,$$

d'où

$$A_{④}(W) \propto S^{(0)}_{5/2}(W) = 1$$

car dans ce cas $A_{④}(w) W^2 \propto \Psi_{02m}(W)$ qui est fonction propre de l'opérateur de collision. En résumé

$$\Psi^{(1)}_{④} = -\frac{\nabla \times \tilde{T}}{2\tilde{T}^2} \cdot C \; a_0^{④} S^{(0)}_{5/2} W^2.$$

- Coefficient de conductivité thermique : utilisant l'équation (5.40)

$$\begin{aligned}
j_q(r,t) &= \frac{1}{2}\frac{(k_B T_0)^{3/2}}{m^{1/2}} n_0 \int_{\mathbb{R}^3} d^3W \; W W^2 f_e(x,u;|\tau|)\, \Psi^{(1)}_{④}(x,u;|\tau|) \\
&= \frac{1}{2}\frac{(k_B T_0)^{3/2}}{m^{1/2}} n_0 \int_{\mathbb{R}^3} d^3W \; W W^2 f_e(x,u;|\tau|) \left(-\frac{\nabla \times \tilde{T}}{2\tilde{T}^2} \cdot C\right) a_0^{④} S^{(0)}_{5/2} W^2 \\
&= -\frac{1}{4}\frac{(k_B T_0)^{3/2}}{m^{1/2}} n_0 \frac{\nabla \times \tilde{T}}{\tilde{T}^2} \cdot C \; a_0^{④} \int_{\mathbb{R}^3} d^3W \; W W^2 f_e(x,u;|\tau|)\, S^{(0)}_{5/2} W^2 \\
&= -\frac{1}{4}\frac{(k_B T_0)^{3/2}}{m^{1/2}} n_0 \frac{\nabla \times \tilde{T}}{\tilde{T}^2} \cdot C \; a_0^{④} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3W \; W W^4 f_e(x,u;|\tau|)}_{=0 \,:\, \text{parité}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ce coefficient de transport reste donc inchangé.

- Coefficient de viscosité : utilisant (**) (section 5.2.3)

$$\Delta P_{ij}^{(1)}(r,t) = k_B T_0 n_0 \int_{\mathbb{R}^3} d^3w \; w_i w_j \; f_e(x,u;|\tau|)\, \Phi_{(4)}^{(1)}(x,u;|\tau|)$$

$$= -\frac{k_B T_0 n_0}{2\tilde{T}^2} \nabla_x \tilde{T}\cdot c \; a_0^{(4)} \int_{\mathbb{R}^3} d^3w \; w_i w_j \; f_e(x,u;|\tau|)\, w^2$$

$$= -\frac{k_B T_0 n_0}{2\tilde{T}^2} \nabla_x \tilde{T}\cdot c \; a_0^{(4)} \frac{\hat{n}}{(2\pi\tilde{T})^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} d^3w \; w_i w_j \; w^2 e^{-\frac{1}{2} w^2/\tilde{T}} \qquad , x = w/\sqrt{2\tilde{T}} \; ; \; d^3w = (2\tilde{T})^{3/2} d^3x$$

$$= -\frac{k_B T_0 n_0}{2\tilde{T}^2} \nabla_x \tilde{T}\cdot c \; a_0^{(4)} \frac{\hat{n}}{(2\pi\tilde{T})^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \; (2\tilde{T})^{3/2} (2\tilde{T})^2 x_i x_j x^2 e^{-x^2}$$

$$= -\frac{k_B \cancel{T_0} \cancel{n_0}}{\cancel{2\tilde{T}^2}} \nabla_x \overset{= T/T_0}{\tilde{T}} \cdot c \; a_0^{(4)} \frac{\overset{= n/n_0}{\hat{n}}}{\pi^{3/2}} \, 2 \, \cancel{2\tilde{T}^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \; x_i x_j x^2 e^{-x^2}$$

$$= -\frac{2 k_B n}{\pi^{3/2}} (\nabla_x T\cdot c)\, a_0^{(4)} I_{ij} \; ,$$

avec

$$I_{ij} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \; x_i x_j x^2 e^{-x^2}.$$

Si $i \neq j$, par exemple $i=1$ et $j=2$, alors

$$I_{12} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \; x_1 \cdot x_2 \; (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\, e^{-x^2}$$

$$= \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dx_1 \; x_1^3 e^{-x_1^2}}_{=0} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dx \; x_2 e^{-x_2^2}}_{=0} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dx_3 e^{-x_3^2}}_{=\sqrt{\pi}} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dx_1 \, x_1 e^{-x_1^2}}_{=0} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dx_2 \, x_2^3 e^{-x_2^2}}_{=0} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dx_3 e^{-x_3^2}}_{=\sqrt{\pi}}$$

$$+ \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dx \; x_1 e^{-x_1^2}}_{=0} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dx \; x_2 e^{-x_2^2}}_{=0} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dx \; x_3^2 e^{-x_3^2}}_{=\sqrt{\pi}/2}$$

$$= 0.$$

Si $i=j$, par exemple $i=j=1$, alors

$$I_{11} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \; x_1^2 \; (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\, e^{-x^2}$$

$$= \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dx_1 \; x_1^4 e^{-x_1^2}}_{=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} dx_2 \; e^{-x_2^2}\right)^2}_{=\pi} + \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} dx \; x_1^2 e^{-x_1^2}\right)^2}_{=\pi/4} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dx_3 \, e^{-x_3^2}}_{=\sqrt{\pi}} + \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} dx_1 \; x_1^2 e^{-x_1^2}\right)^2}_{=\pi/4} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dx_2 \, e^{-x_2^2}}_{=\sqrt{\pi}}$$

$$= \pi^{3/2} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right)$$

$$= \frac{5}{4} \pi^{3/2}.$$

On a donc

$$\Delta P_{ij}^{(1)}(r,t) = -\frac{2}{\cancel{\pi^{3/2}}} \cdot \frac{5}{4} \cancel{\pi^{3/2}} \, k_B n \, (\nabla_x T\cdot c)\, a_0^{(4)} \, \delta_{ij}$$

$$= -\frac{5}{2} k_B n \, (\nabla_x T\cdot c)\, a_0^{(4)} \, \delta_{ij} \qquad , \; x = 1/\lambda \, r \; ; \; \nabla_x = \lambda \nabla_r \; ; \; c = \sqrt{m/k_B T_0}\, V$$

$$= -\frac{5}{2} k_B n \, \lambda_{mfp} \sqrt{\frac{m}{k_B T_0}} \, (\nabla_r T \cdot V)\, a_0^{(4)} \, \delta_{ij}$$

$$= -\frac{5}{2} \sqrt{\frac{m k_B}{T_0}} \, \lambda_{mfp} \, a_0^{(4)} \, n(r,t)\, \nabla_r T(r,t)\cdot V(r,t) \; \delta_{ij} \qquad (3)$$

Ce terme, purement diagonal, n'a pas le tenseur des contraintes Λ en évidence, ce qui ne permet pas de faire le lien avec la loi macroscopique $\Delta P(r,t) = -2\eta(r,t)\Lambda$. De plus, l'expression (3) dépend du coefficient $a_0^{(6)}$ qui est la projection de la solution sur le polynôme de Sonine $S_{5/2}^{(0)}$. Le calcul de $a_0^{(4)}$, hautement non trivial, nécessite le recours à des méthodes numériques. La modification de pression (7) étant purement diagonale, l'égalité de notre calcul microscopique avec la loi macroscopique introduit l'ensemble d'équations différentielles pour $V(r,t)$

$$\eta^{(1)}(r,t)\, \Lambda = \frac{5}{4} \sqrt{\frac{m k_B}{T_0}} \, \lambda_{mfp} \, a_0^{(4)} \, n(r,t) \left(\nabla_r T(r,t)\cdot V(r,t)\right) \mathbb{1} .$$

⑥ La solution est de la forme

$$\Psi^{(1)}_{⑥} = -\frac{1}{T}\sum_{ij=1}^{3} c_i \frac{\partial c_j}{\partial x_i} A_{⑥}(W)\, W_j .$$

En effet, l'équation pour $\Psi^{(1)}_{⑥}$ est alors

$$L[\Psi^{(1)}_{⑥}] = -L\left[\frac{1}{T}\sum_{ij=1}^{3} c_i \frac{\partial c_j}{\partial x_i} A_{⑥}(W)\, W_j\right] = -\frac{1}{T}\sum_{ij=1}^{3} c_i \frac{\partial c_j}{\partial x_i} L[A_{⑥}(W)\, W_j] = -\frac{1}{T}\sum_{ij=1}^{3} c_i \frac{\partial c_j}{\partial x_i} W_j \quad \forall W$$

$$\Rightarrow L[A_{⑥}(W)\, W_j] = W_j ,$$

d'où

$$A_{⑥}(W) \propto S^{(0)}_{3/2} = 1$$

car dans ce cas $A_5(W)\, W_j \propto \Psi_{01m}(W)$ qui est fonction propre de l'opérateur de collision. En résumé

$$\Psi^{(1)}_{⑥} = -\frac{1}{T}\sum_{ij=1}^{3} c_i \frac{\partial c_j}{\partial x_i} S^{(1)}_{3/2}\, W_j .$$

En ce qui concerne les coefficients de transport, la discussion est en tout point similaire à celle du terme ①, c'est-à-dire qu'il n'y a aucune contribution supplémentaire à ces coefficients.

⑤ Décomposons ce terme selon

$$-\frac{1}{T} WW : D = \underbrace{-\frac{1}{T}\left(WW - \tfrac{1}{3}W^2 \mathbb{1}\right) : D}_{⑤a} \; \underbrace{-\frac{1}{T}\frac{1}{3} W^2 \mathbb{1} : D}_{⑤b}$$

Le terme ⑤a est au signe près le même que celui de l'ordre ε^0, donc sa contribution à la viscosité est

$$\eta^{(1)}_{⑤}(r,t) = -\eta^{(0)}(r,t)$$

Pour ce qui est du terme ⑤b, la solution est de la forme

$$\Psi^{(1)}_{⑤b} = -B_{⑤b}(W)\,\frac{1}{3T} W^2 \mathbb{1} : D$$

En effet, l'équation pour $\Psi^{(1)}_{⑤b}$ est alors

$$L[\Psi^{(1)}_{⑤b}] = -\frac{1}{3T}\mathbb{1} : D \; L[B_{⑤b}(W)\, W^2] = -\frac{1}{3T} W^2 \mathbb{1} : D$$

$$\Rightarrow L[B_{⑤b}(W)\, W^2] = W^2 ,$$

d'où

$$B_{⑤b}(W) \propto S^{(0)}_{5/2}(W) = 1$$

car dans ce cas $B_{⑤b}(W) \propto \Psi_{02m}(W)$ qui est fonction propre de l'opérateur de collision. En résumé,

$$\Psi^{(1)}_{⑤b} = -\frac{1}{3T}\mathbb{1} : D \; b_0^{(1)} S^{(0)}_{5/2} \cdot W^2$$

• Coefficient de viscosité : avec l'équation (**) (section 5.3.3)

$$\Delta P_{ij}^{(1)}(r,t) = k_B T_0 n_0 \int_{\mathbb{R}^3} d^3w \; w_i w_j \; f_e(x,u;\tilde{T}) \; \Phi^{(1)}_{(5)}(x,u;\tilde{T})$$

$$= -\frac{k_B T_0 n_0}{3\tilde{T}} \mathbb{1} : D \; b_0^{⑤} \int_{\mathbb{R}^3} d^3w \; w_i w_j \; f_e(x,u;\tilde{T}) \; w^2 \qquad ; x = w/\sqrt{2\tilde{T}} \; ; \; d^3w = (2\tilde{T})^{3/2} d^3x$$

$$= -\frac{k_B T_0 n_0}{3\tilde{T}} \mathbb{1} : D \; b_0^{⑤} \frac{\tilde{n}}{(2\pi\tilde{T})^{3/2}} (2\tilde{T})^{3/2} (2\tilde{T})^2 \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \; x_i x_j \; x^2 \exp(-x^2)}_{= I_{ij}}$$

$$= -\frac{k_B \cancel{T_0} \cancel{n_0}}{3\cancel{\tilde{T}}} \frac{n}{\cancel{n_0}} \frac{1}{\pi^{3/2}} 4 \tilde{T}^{\cancel{2}}_{T/T_0} \; I_{ij} \; \mathbb{1} : D \; b_0^{⑤}$$

$$= -\frac{4}{3} \frac{1}{\pi^{3/2}} n k_B T \; I_{ij} \; \mathbb{1} : D \; b_0^{⑤}$$

Le calcul de I_{ij} a déjà été réalisé lors de l'étude du terme ④a, et on avait $I_{ij} = 5/4 \, \pi^{3/2} \delta_{ij}$, d'où

$$\Delta P^{(1)}(r,t) = -\frac{5}{3} n k_B T \; \mathbb{1} : D \; \mathbb{1} \; b_0^{⑤} \qquad , D = \lambda_{mfp} \sqrt{\frac{m}{k_B T_0}} \Lambda$$

$$= -\frac{5}{3} n k_B T \; b_0^{⑤} \lambda_{mfp} \sqrt{\frac{m}{k_B T_0}} \; \mathbb{1} : \Lambda \; \mathbb{1}$$

$$= -\frac{5}{3} \sqrt{\frac{m k_B}{T_0}} \lambda_{mfp} \; b_0^{⑤} \; n(r,t) \, T(r,t) \; \mathbb{1} : \Lambda \; \mathbb{1}$$

À nouveau, la connexion avec la loi macroscopique $\Delta P^{(1)}(r,t) = -2\eta^{(1)}(r,t)$ n'est pas explicitement possible, et on obtient les conditions

$$\eta^{(1)}(r,t) \, \Lambda = \frac{5}{6} \sqrt{\frac{m k_B}{T_0}} \lambda_{mfp} \; b_0^{⑤} \; n(r,t) \, T(r,t) \; \mathbb{1} : \Lambda \; \mathbb{1} \; .$$

5.4.2. Récapitulation

La contribution à l'ordre ε^1 au coefficient de conductivité thermique est

$$\boxed{\lambda^{(1)}(r,t) = -\lambda^{(0)}(r,t) \, ,}$$

tandis que celle au coefficient de viscosité

$$\boxed{\eta^{(1)}(r,t) = -\eta^{(0)}(r,t) + \Delta\eta^{(1)}(r,t) \, ,}$$

avec $\Delta\eta^{(1)}(r,t) = \eta_1^{(1)}(r,t) + \eta_2^{(1)}(r,t)$ la somme des deux contributions solutions des équations différentielles

$$\eta_1^{(1)}(r,t) \, \Lambda = \frac{5}{4} \sqrt{\frac{m k_B}{T_0}} \lambda_{mfp} \; a_0^{⑥} \; n(r,t) \; (\nabla_r T(r,t) \cdot V(r,t)) \, \mathbb{1}$$

$$\eta_2^{(1)}(r,t) \, \Lambda = \frac{5}{6} \sqrt{\frac{m k_B}{T_0}} \lambda_{mfp} \; b_0^{⑤} \; n(r,t) \; T(r,t) \; \mathbb{1} : \Lambda \; \mathbb{1} \, .$$

Nous supposons que $\Delta\eta^{(1)}(r,t) = 0$, mais n'avons pas encore réussi à le montrer.

Etablissement des relations entre les coefficients : $\boxed{\text{Point - 1}}$

On a définit :

$$A(w) = \sum_{n\geq 0} a_n S^{(n)}_{3/2}\left(\frac{w^2}{2\tilde T}\right) \quad ; \quad A := A(w)\cdot w := \sum_{n\geq 0} a_n\, a^{(n)} \quad , \quad a^{(n)} = S^{(n)}_{3/2}\left(\frac{w^2}{2\tilde T}\right)\cdot w \quad , \; w = u - c$$

L'équation à résoudre est :

$$L[A] = \left(\frac{w^2}{2\tilde T} - \frac{5}{2}\right) w$$

que l'on multiplie par $a^{(n)} = S^{(n)}_{3/2}(w^2/2\tilde T)\, w$

$$L[A]\, a^{(n)} = \underbrace{\left(\frac{w^2}{2\tilde T} - \frac{5}{2}\right)}_{= -S^{(1)}_{3/2}\left(\frac{w^2}{2\tilde T}\right)} w\, S^{(n)}_{3/2}\left(\frac{w^2}{2\tilde T}\right) w$$

que l'on multiplie par la distribution d'équilibre $f_e = \frac{\tilde n}{(2\pi\tilde T)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{w^2}{\tilde T}\right)$:

$$L[A]\, a^{(n)} f_e = -f_e\, S^{(1)}_{3/2}\left(\frac{w^2}{2\tilde T}\right) w\, S^{(n)}_{3/2}\left(\frac{w^2}{2\tilde T}\right) w$$

que l'on intègre sur w :

$$\int d^3w\, L[A]\, a^{(n)} f_e = -\int d^3w\, \frac{\tilde n}{(2\pi\tilde T)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{w^2}{\tilde T}\right) S^{(1)}_{3/2}\left(\frac{w^2}{2\tilde T}\right) w\, S^{(n)}_{3/2}\left(\frac{w^2}{2\tilde T}\right) w$$

Soit la variable $\mathcal{C} = \frac{1}{\sqrt{2\tilde T}}\, w$, alors $d^3w = (2\tilde T)^{3/2}\, d^3\mathcal{C}$ et :

$$\int d^3w\, L[A]\, a^{(n)} f_e = -\int d^3\mathcal{C}\, \cancel{(2\tilde T)^{3/2}}\, \frac{\tilde n}{\cancel{(2\tilde T)^{3/2}}}\, \frac{1}{\pi^{3/2}} \exp(-\mathcal{C}^2)\, S^{(1)}_{3/2}(\mathcal{C}^2)\, \sqrt{2\tilde T}\,\mathcal{C}\, S^{(n)}_{3/2}(\mathcal{C}^2)\, \sqrt{2\tilde T}\,\mathcal{C}$$

$$= -2\tilde T\, \frac{1}{\pi^{3/2}}\, \tilde n \int d^3\mathcal{C}\; e^{-\mathcal{C}^2}\, S^{(1)}_{3/2}(\mathcal{C}^2)\, \mathcal{C}\, S^{(n)}_{3/2}(\mathcal{C}^2)\, \mathcal{C}$$

$$= -2\tilde T\tilde n\, \frac{1}{\pi^{3/2}}\, 2\pi \int_0^\infty d\mathcal{C} \int_0^\pi d\theta\; e^{-\mathcal{C}^2} S^{(n)}_{3/2}(\mathcal{C}^2)\, \mathcal{C}\, S^{(n)}_{3/2}(\mathcal{C}^2)\, \mathcal{C}\;\; \mathcal{C}^2 \sin\theta$$

$$= -2\tilde T\tilde n\, \frac{1}{\pi^{3/2}}\, 2\pi \underbrace{\int_0^\pi d\theta \sin\theta}_{=2} \int_0^\infty d\mathcal{C}\; \mathcal{C}^4\, e^{-\mathcal{C}^2}\, S^{(1)}_{3/2}(\mathcal{C}^2)\, S^{(n)}_{3/2}(\mathcal{C}^2)$$

$$= -8\tilde T\tilde n\, \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_0^\infty \frac{1}{2} d(\mathcal{C}^2)\; \mathcal{C}^3\, e^{-\mathcal{C}^2}\, S^{(1)}_{3/2}(\mathcal{C}^2)\, S^{(n)}_{3/2}(\mathcal{C}^2) \quad , \quad x = \mathcal{C}^2$$

$$= -4\tilde T\tilde n\, \frac{1}{\pi^{1/2}} \underbrace{\int_0^\infty dx\; e^{-x}\, x\cdot\sqrt{x}\; S^{(1)}_{3/2}(x)\, S^{(n)}_{3/2}(x)}_{\substack{= \langle S^{(1)}_{3/2} | S^{(n)}_{3/2} \rangle \\ = \frac{\Gamma(\ell+n+1)}{n!}\delta_{n,1}}}$$

$, \; L^2([0,\infty[, x^\ell e^{-x} dx)$, $\ell = 3/2$

$$= -4\tilde T\tilde n\, \frac{1}{\pi^{1/2}}\, \frac{\Gamma(3/2+1+1)}{1!}\, \delta_{n,1}$$

$$= -4\tilde T\tilde n\, \frac{1}{\pi^{1/2}} \underbrace{\Gamma(1/2+3)}_{= \frac{\pi^{1/2}}{2^3}(2\cdot 3-1)!! = \frac{\pi^{1/2}}{8} 1\cdot 3} \delta_{n,1}$$

$$= -\frac{12}{8}\tilde T\tilde n\, \delta_{n,1}$$

$$= -\frac{3}{2}\tilde T\tilde n\, \delta_{n,1}$$

OK

D'autre part, le membre de gauche est donné dans le Chapman par :

$$\int d^3w\, L[A]\, a^{(n)} f_e = \frac{2}{5}\tilde T\tilde n\, [A, a^{(n)}]$$

il faudrait l'expression exacte de ce produit scalaire, dans mes notations

avec $[A, a^{(n)}]$ un produit scalaire donné dans le Chapman. En remplaçant la valeur de A on trouve

$$\underbrace{\left[\sum_{p\geq 1} a_p\, a^{(p)}, a^{(n)}\right]}_{= \sum_{p\geq 1} a_p \underbrace{[a^{(p)}, a^{(n)}]}_{:= a_{pn}}} = \underbrace{-\frac{15}{4}\delta_{n,1}}_{:= \alpha_n}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\sum_{p\geq 1} a_p\, a_{pn} = \alpha_n} \quad , \quad \alpha_n = -\frac{15}{4}\delta_{n,1}$$

a_p et a_{pn} : difficile à calculer, contient toutes les valeurs propres.

$\boxed{\text{Point 0}}$: établir exactement ce que signifie ce produit scalaire

$$[F,G] = \int dc \; G \; I(F) \qquad (p.83\;,\;4.4.7)$$

$$= \int dc \; G \; \frac{1}{n^2} \iint de' dc_1 \; f^{(0)} f_1^{(0)} \left(F_1 + F - F_1' - F' \right) g \cdot \alpha_1$$

, $g = |c - c_1|$: vitesse relative

α_1: section efficace différentielle

$$f^{(0)} = n \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2kT}(c-c_1)^2}$$

dans mes notations, cette expression $[F,G]$ doit être:

$$[F,G] = -\int d^3v \; G \; \frac{1}{n^2} \int d^3e' d^3v_1 \; |v-v_1| \; \sigma(\chi, |v-v_1|) \; fe(r,v,t) \, fe(r,v_1,t) \left(F_1' + F' - F - F_1 \right)$$

ce que j'aimerais passer dans l'espace des p pour établir un lien avec mes expressions (puis ensuite avec mes expressions adimensionalisées)

$$\begin{cases} p = m \cdot v \; ; \; d^3v = \frac{1}{m^3} d^3p \\ fe(r,v,t) = fe(r,p,t) \cdot m^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow [F,G] = -\frac{1}{\cancel{m^3}} \int d^3p \; G \; \frac{1}{n^2} \int d^3e' \frac{1}{\cancel{m^3}} d^3p_1 \; \frac{1}{m} |p-p_1| \; \sigma\left(\chi, |p-p_1| \frac{1}{m}\right) \cdot \cancel{m^3} \cdot \cancel{m^3} \; fe(r,p,t) \, fe(r,p_1,t) \, (\cdots)$$

$$= -\frac{1}{m} \int d^3p \; G \; \frac{1}{n^2} \int d^3e' d^3p_1 \; |p-p_1| \; \sigma\left(\chi, \frac{|p-p_1|}{m}\right) fe(r,p,t) \, fe(r,p_1,t) \left(F_1' + F' - F - F_1 \right)$$

$$= -\frac{1}{m} \int d^3p \; G \; \frac{1}{n^2} \; fe(r,p,t) \int d^3e' d^3p_1 \; |p-p_1| \; \sigma\left(\chi, \frac{1}{m}|p-p_1|\right) fe(r,p_1,t) \left(F_1' + F' - F - F_1 \right)$$

$$= -\frac{1}{m} \int d^3p \; G \cdot \frac{1}{n^2} \; fe(r,p,t) \int d^3e' d^3p_1 \; |p-p_1| \; \underbrace{\lambda \cdot n_0 \, \sigma\left(\chi, \frac{1}{m}|p-p_1|\right)}_{= \Sigma(\chi, |u_1 - u|)} \frac{1}{\lambda \cdot n_0} \; fe(r,p,t) \left(F_1' + F' - F - F_1 \right)$$

$$\begin{cases} p = \sqrt{mkT_0}\, u \quad ; \quad d^3p = (mkT_0)^{3/2} d^3u \\ fe(r,p,t) = \dfrac{n}{(2\pi mkT)^{3/2}} \exp\left(- \dfrac{(p - mv)^2}{2mkT} \right) = \dfrac{1}{n_0} \dfrac{\chi}{(2\pi \tilde{T})} \dfrac{1}{m^{3/2}} \dfrac{1}{(kT_0)^{3/2}} \exp\left(- \dfrac{1}{2} \dfrac{(u-c)^2}{\tilde{T}} \right) \\ \qquad = \cancel{\dfrac{1}{n_0}} \dfrac{1}{(mkT_0)^{3/2}} \; fe(x,u,\tau) \end{cases}$$

no

$$\Rightarrow [F,G] = -\frac{1}{m} \int d^3u \; \cancel{(mkT_0)^{3/2}} \; G \cdot \frac{1}{n^2} \; \frac{1}{n_0} \frac{1}{\cancel{(mkT_0)^{3/2}}} \; fe(x,u,\tau) \int d^3e' \int d^3u_1 \; \cancel{(mkT_0)^{3/2}} \sqrt{mkT_0} \, |u - u_1| \, \Sigma(\chi, |u - u_1|) \; \times$$

$$\times \frac{1}{\lambda n_0} \; \frac{1}{n_0} \; \frac{1}{\cancel{(mkT_0)^{3/2}}} \; fe(x, u_1, \tau) \left(F_1' + F' - F - F_1 \right)$$

$$= -\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n_0} \cdot \sqrt{mkT_0} \cdot \frac{1}{\lambda n_0} \frac{1}{n_0} \int d^3u \; G \; \frac{1}{n^2} \; fe(x,u,\tau) \underbrace{\int d^3e' d^3u_1 \; |u-u_1| \; \Sigma(\chi, |u-u_1|) \; fe(x,u_1,\tau) \, (\cdots)}_{= L[F]}$$

$$= -\sqrt{\frac{kT_0}{m}} \; \frac{1}{\lambda} \; \frac{1}{n_0^3} \int d^3u \; G \; \frac{1}{n^2} \; fe(x,u,\tau) \quad L[F]$$

$$\boxed{[F,G] = -\sqrt{\frac{kT_0}{m}} \; \frac{1}{\lambda} \; \frac{1}{n_0^{\cancel{3}\,1}} \frac{1}{n^2} \int d^3u \; G \; fe(x,u,\tau) \; L[F]}$$

Ok vérifié.

Pour le calcul de jq, le livre utilise la notation

$$[A,A] = \int dc \; A \, I(A) \qquad ; \quad A = A(\mathcal{S}) \cdot \mathcal{S} \qquad ; \quad \mathcal{S} = \sqrt{\frac{m}{2kT}} \, \mathbf{C} \; ; \; \mathbf{C} = c_0 - c$$

En fait, $\mathcal{S}$ est défini de sorte que la distribution d'équilibre soit $\sim e^{-\mathcal{S}^2}$, donc $\mathcal{S} = \frac{W}{\sqrt{2\tilde{T}}}$, et par conséquent

$$[A,A] = \int dc \; A(\mathcal{S}) \cdot \mathcal{S} \; I(A(\mathcal{S}) \cdot \mathcal{S})$$

$$= \int dc \; A(W/\sqrt{2\tilde{T}}) \frac{W}{\sqrt{2\tilde{T}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\tilde{T}}} \; I\left(A(W/\sqrt{2\tilde{T}}) \, W\right)$$

$$= \frac{1}{2\tilde{T}} \underbrace{\int dc \; A \, I(A)}_{= [A,A]} \qquad ; \; c = \text{vitesse} = v$$

$\uparrow\uparrow$ avec "mes" A — apparaîtra toujours le λ ..

$$\boxed{\underset{\uparrow \text{ses "A"}}{[A,A]} = -\frac{1}{2\tilde{T}} \sqrt{\frac{kT_0}{m}} \; \frac{1}{\lambda} \; \frac{1}{n_0^3} \; \frac{1}{n^2} \int d^3u \; \underset{\uparrow \text{mes "A"}}{A} \; fe(x,u,\tau) \; L[A]}$$

$$\downarrow A = A(W/\sqrt{2\tilde{T}}) \cdot W$$

$\boxed{\text{Point 1}}$ vérification du point 0 : établir exactement ce que signifie ce produit scalaire

$$[F,G] = \int dc\; G\; I(F) = \int dc\; G\; \frac{1}{n^2} \iint de'\, dc_1\; f^{(0)} f_1^{(0)}\; (F_1 + F - F_1' - F')\; g\, \alpha_1 \qquad , g = |c_1 - c| \;;\alpha_1 : \text{sect. eff. diff.}$$

$$f^{(0)} = n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m}{2kT}(c - \bar{c}_1)^2\right)$$

avec : $\begin{matrix} c = v \\ c_1 = v_1 \end{matrix}$ $\begin{matrix} ; p = mv \\ ; p_1 = mv_1 \end{matrix}$ $\begin{matrix} ; d^3c = 1/m^3\, d^3p \\ ; d^3c_1 = 1/m^3\, d^3p_1 \end{matrix}$

$$[F,G] = \int d^3p\; \frac{1}{m^3}\; G\; \frac{1}{n^2} \int d^3e' \int d^3p_1\; \frac{1}{m^3}\; \underbrace{n \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{1}{2mkT}(p - mv)^2\right)}\; n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{1}{2mkT}(p_1 - mv)^2\right) (F_1 + F - F_1' - F') \frac{1}{m} |p - p_1| \alpha_1$$

$$= n \cdot \frac{1}{(2\pi mkT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(p - mv)^2}{2mkT}\right)$$

$$= f_e(r, p, t)$$

$$= \int d^3p\; G\; \frac{1}{n^2} \iint d^3e'\, d^3p_1\; f_e(r,p,t)\, f_e(r, p_1, t)\; \frac{1}{m} |p - p_1|\; \alpha_1\; (F_1 + F - F_1' - F')$$

$$= \frac{1}{n^2} \frac{1}{m} \int d^3p\; G\; f_e(r,p,t) \iint d^3e'\, d^3p_1\; f_e(r, p_1, t)\; |p - p_1|\; \alpha_1\; (F_1 + F - F_1' - F')$$

avec :
$$\begin{cases} p = \sqrt{mkT_0}\, u \quad ; d^3p = (mkT_0)^{3/2} d^3u \\ f_e(r,p,t) = \dfrac{n}{(2\pi mkT)^{3/2}} \exp\left(-\dfrac{(p - mv)^2}{2mkT}\right) = n_0 \dfrac{\tilde{n}}{(2\pi\tilde{T})^{3/2}} \dfrac{1}{(mkT_0)^{3/2}} \exp\left(-\dfrac{1}{2\tilde{T}} w^2\right) = \dfrac{n_0}{(mkT_0)^{3/2}} f_e(x, u, \tau) \end{cases}$$

$$[F,G] = -\frac{1}{n^2} \frac{1}{m} \int d^3u\; \cancel{(mkT_0)^{3/2}}\; G\; \frac{n_0}{\cancel{(mkT_0)^{3/2}}}\; f_e(x,u,\tau) \iint d^3e'\, d^3u_1\; \cancel{(mkT_0)^{3/2}}\; f_e(x, u_1, \tau) \cdot \frac{n_0}{\cancel{(mkT_0)^{3/2}}}\; \sqrt{mkT_0}\; |u - u_1|\; \alpha_1\; (F_1' + F' - F_1 - F)$$

$$= -\frac{1}{n^2} \frac{1}{m} n_0^2 \int d^3u\; G\, f_e(x,u,\tau) \iint d^3e'\, d^3u_1\; f_e(x,u,\tau)\; |u - u_1|\; \alpha_1\; (F_1' + F' - F_1 - F) \quad \sqrt{mkT_0}$$

$$= -\frac{1}{\tilde{n}^2} \sqrt{\frac{kT}{m}} \int d^3u\; G\, f_e(x,u,\tau) \iint d^3e'\, d^3u_1\; f_e(x,u,\tau) \quad \underbrace{|u - u_1|}_{= w} (F_1' + F' - F_1 - F)\; \alpha_1 \cdot$$

$$\alpha_1 = \sigma(x, \tfrac{1}{m}|p_1 - p|)$$
$$= \frac{\lambda \cdot n_0}{\lambda n_0} \sigma(x, \tfrac{1}{m}|p_1 - p|)$$
$$= \frac{1}{\lambda n_0} \Sigma(x, |u_1 - u|)$$

$$\boxed{[F,G] = -\frac{1}{\tilde{n}^2 \lambda n_0} \sqrt{\frac{kT}{m}} \int d^3u\; G\, f_e(x,u,\tau)\; L[F]}$$

avec :
$$A = A(s) \cdot s \quad ; s = \sqrt{\frac{m}{2kT}}\, w \quad ; d^3u = d^3w = \left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2} \underbrace{d^3s}_{= d^3c} \qquad ; s = w/\sqrt{2\tilde{T}} \Rightarrow$$

$$[A,A] = -\frac{1}{\tilde{n}^2} \frac{1}{\lambda n_0} \sqrt{\frac{kT}{m}} \int d^3u\; A\left(\frac{w}{\sqrt{2\tilde{T}}}\right) w\; f_e(x,w,\tau) \iint d^3e'\, d^3u_1\; f_e(x,w,\tau) \sqrt{\frac{2kT}{m}}\; \underbrace{|u - u_1|}_{= w} (\cdots)\; \Sigma$$

avec :
$$Y = u/\sqrt{2\tilde{T}} \;;\; Y_1 = u_1/\sqrt{2\tilde{T}}$$
$$d^3Y = d^3u/(2\tilde{T})^{3/2} \;;\; d^3Y_1 = d^3u_1/(2\tilde{T})^{3/2}$$

$$[A,A] = -\frac{1}{\tilde{n}^2} \frac{1}{\lambda n_0} \sqrt{\frac{kT}{m}} (2\tilde{T})^{6/2} \int d^3Y\; \underbrace{A(Y)\, Y}_{= A}\; f_e(x,Y,\tau)\; L[A] \cdot \sqrt{2\tilde{T}} \cdot \sqrt{2\tilde{T}}$$

$$= -\frac{1}{\tilde{n}^2 \lambda n_0} \sqrt{\frac{kT}{m}} (2\tilde{T})^{3+1} \int d^3Y\; A\; f_e(x,Y,\tau)\; L[A]$$

faux ; pas nécessaire.

$$= -\frac{(2\tilde{T})^2}{\tilde{n}^2 \lambda n_0} \sqrt{\frac{kT}{m}} \underbrace{\int d^3Y\, A\, f_e(x,Y,\tau)\; L[A]}$$

avec ici mes expressions de A : $A(w^2/2\tilde{T}) \cdot w$

Point 1: Calcul ter : calcul de jq

①

$j_q(r,t)$ est le courant d'énergie, défini par

$$j_q(r,t) = \int d^3p \underbrace{\frac{p-mv}{m}}_{\substack{\text{déviation de}\\ \text{vitesse autour}\\ \text{de la moyenne}\\ [v]=m/s}} \underbrace{\frac{(p-mv)^2}{2m}}_{\substack{\text{énergie}\\ [J]=\frac{kg\,m^2}{s^2}}} \underbrace{f_e(r,p,t)\,\Phi^{(1)}(r,p,t)}_{\text{distribution : unités : } [\frac{1}{d^3p} n]}$$

les unités de jq sont ainsi, à cause de la normalisation de f qui est $\int d^3p\, f_e(r,p,t) = n(r,t)$

$$[j_q] = [d^3p]\,\frac{m}{s}\,[J]\left[\frac{1}{d^3p} n\right] = \frac{m}{s}[J][n] = \frac{m}{s}\frac{m^2 kg}{s^2}\frac{\#}{m^3} = \left(\frac{m}{s}\right)^3 kg\,\frac{\#}{m^3} = \frac{\#\cdot kg}{s^3}$$

Pour calculer $j_q(r,t)$, on va sortir les unités, avec :

$$\begin{cases} f_e(r,p,t) = n_0 \dfrac{1}{(mkT_0)^{3/2}} f_e(x,u,\tau) & ; \bar\Phi^{(1)}(r,p,t) = \Phi^{(1)}(x,u,\tau) \quad ; f_e(x,u,\tau) = \dfrac{\tilde n}{(2\pi\tilde T)^{3/2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{W^2}{\tilde T}} \\ p = \sqrt{mkT_0}\,u & ; d^3p = (mkT_0)^{3/2} d^3u \\ v = \sqrt{kT_0/m}\; c & ; W = u - c \end{cases}$$

$$\Rightarrow j_q(r,t) = \int d^3u\, (mkT_0)^{3/2} \sqrt{\frac{kT_0}{m}}\, W\, \frac{1}{2m} mkT_0 W^2\, n_0 \frac{1}{\cancel{(mkT_0)^{3/2}}} f_e(x,u,\tau)\,\bar\Phi^{(1)}(x,u,\tau)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{kT_0}{m}}(kT_0)\, n_0 \int d^3u\, WW^2 f_e(x,u,\tau)\,\Phi^{(1)}(x,u,\tau)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(kT_0)^{3/2}}{m^{1/2}} n_0 \int d^3u\, WW^2 f_e(x,u,\tau)\,\Phi^{(1)}(x,u,\tau)$$

les unités de cette nouvelle expression sont bien

$$[j_q] = [J^{3/2}]\frac{1}{[m^{1/2}]}[n_0] = \left(\frac{kg\,m^2}{s^2}\right)^{3/2}\frac{1}{kg^{1/2}}[n_0] = \frac{kg^{3/2-1/2}\, m^3}{s^3}\frac{\#}{m^3} = \#\cdot\frac{kg}{s^3}$$

ce qui, fort heureusement, correspond aux anciennes unités. On a

$$\Phi^{(1)}(x,u,\tau) = A(W)\cdot W\,\frac{\nabla_x \tilde T}{\tilde T} + \underbrace{B(W)\,\frac{\Lambda}{\tilde T}\left(WW - \tfrac{1}{3}W^2 \mathbb{1}\right) : \Lambda}_{\text{ne contribue pas à la chaleur}} \qquad , x = 1/\lambda\, r \;;\; \nabla_x = \lambda\nabla_r$$

Ainsi :

$$j_q(r,t) = \frac{1}{2}\frac{(kT_0)^{3/2}}{m^{1/2}} n_0 \underbrace{\int d^3u\, WW^2 f_e(x,u,\tau)\, A(W)\, W}_{=\frac{1}{3}\int d^3u\, f_e(x,u,\tau)\, W^4 A(W)} \frac{\nabla_x\tilde T}{\tilde T}$$

Or grâce aux invariants de collision qui disent que

$$\int d^3u\; w\, f_e(x,u,\tau)\,\bar\Phi^{(1)}(x,u,\tau) = \int d^3u\; f_e(x,u,\tau)\, W^2 A(W)\frac{\nabla_x\tilde T}{\tilde T} = 0$$

on peut ajouter dans l'intégrand $-2\tilde T\, 5/2\, W^2$ par exemple, ce qui donne : (on va voir que seul a_1 contribue à jq)

$$j_q(r,t) = \frac{1}{2}\frac{(kT_0)^{3/2}}{m^{1/2}} n_0\, \frac{1}{3}\int d^3u\; f_e(x,u,\tau)\, A(W)\left(W^4 - \frac{5}{2}2\tilde T\, W^2\right)\frac{\nabla_x\tilde T}{\tilde T}$$

$$= \frac{1}{6}\frac{(kT_0)^{3/2}}{m^{1/2}} n_0 \cdot 2\tilde T\int d^3u\; f_e(x,u,\tau)\, A(W)\left(\frac{W^4}{2\tilde T} - \frac{5}{2}W^2\right)\frac{\nabla_x\tilde T}{\tilde T}$$

$$= \frac{1}{3}\frac{(kT_0)^{3/2}}{m^{1/2}} n_0\, \tilde T\int d^3u\; A(W)W\; f_e(x,u,\tau) \underbrace{\left(\frac{W^2}{2\tilde T} - \frac{5}{2}\right)W}_{\substack{= L[A(W)W] \\ = -S^{(1)}_{3/2}\left(\frac{W^2}{2\tilde T}\right)W}} \frac{\nabla_x\tilde T}{\tilde T}$$

On définit :

$$A(W) = \sum_{n\geq 0} a_n\, S^{(n)}_{3/2}\left(\frac{W^2}{2\tilde T}\right) \;;\quad A := A(W)\cdot W := \sum_{n\geq 0} a_n\, a^{(n)} \quad ;\quad a^{(n)} = S^{(n)}_{3/2}\left(\frac{W^2}{2\tilde T}\right)W,$$

alors avec $d^3u = d^3w$:

$$j_q(r,t) = -\frac{1}{3}\frac{(kT_0)^{3/2}}{m^{1/2}} n_0\,\tilde T\int d^3w \sum_{n\geq 0} a_n\, S^{(n)}_{3/2}\left(\frac{W^2}{2\tilde T}\right) W f_e(x,u,\tau)\; S^{(1)}_{3/2}\left(\frac{W^2}{2\tilde T}\right)W\;\frac{\nabla_x\tilde T}{\tilde T}$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{(kT_0)^{3/2}}{m^{1/2}} n_0\,\tilde T \sum_{n\geq 0} a_n \underbrace{\int d^3W\; f_e(x,u,\tau)\; S^{(n)}_{3/2}\left(\frac{W^2}{2\tilde T}\right)W S^{(1)}_{3/2}\left(\frac{W^2}{2\tilde T}\right)W}_{:= I_n}\;\frac{\nabla_x\tilde T}{\tilde T}$$

$T_0^{3/2 - 3/2 - 2/2} = T_0^{-1/2}$

On peut calculer explicitement I_n :

$$I_n = \int d^3W\, \frac{\tilde n}{(2\pi\tilde T)^{3/2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{W^2}{\tilde T}}\; S^{(n)}_{3/2}\left(\frac{W^2}{2\tilde T}\right)W\; S^{(1)}_{3/2}\left(\frac{W^2}{2\tilde T}\right)W \qquad ; x = \frac{W}{\sqrt{2\tilde T}} \;;\; d^3x = \frac{1}{(2\tilde T)^{3/2}} d^3W$$

$$I_n = \int d^3x \, (2\tilde{T})^{3/2} \frac{\tilde{n}}{(2\pi\tilde{T})^{3/2}} e^{-x^2} S^{(n)}_{3/2}(x^2) \sqrt{2\tilde{T}}\, x \; S^{(1)}_{3/2}(x^2) \sqrt{2\tilde{T}}^{-1} x \quad ; \quad d^3x = x\, dx \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{\pi^{3/2}} 2\tilde{T}\tilde{n} \int_0^\infty dx\, x^4 e^{-x^2} S^{(n)}_{3/2}(x^2) S^{(1)}_{3/2}(x^2) \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta}_{=4\pi}$$

$$= \frac{8\pi}{\pi^{3/2}} \tilde{T}\tilde{n} \int_0^\infty dx\, x^4 e^{-x^2} S^{(n)}_{3/2}(x^2) S^{(1)}_{3/2}(x^2) \quad ; \; Y = x^2 \; ; \; dy = 2x dx$$

$$= \frac{8\pi}{\pi^{3/2}} \tilde{T}\tilde{n} \int_0^\infty dy \, \frac{1}{2x} y^2 \, e^{-y} S^{(n)}_{3/2}(y) S^{(1)}_{3/2}(y)$$

$$= \frac{4\pi}{\pi^{3/2}} \tilde{T}\tilde{n} \underbrace{\int_0^\infty dy \, e^{-y} y^{3/2} S^{(n)}_{3/2}(y) S^{(1)}_{3/2}(y)}$$

$$= \langle S^{(n)}_{3/2}(y) | S^{(1)}_{3/2}(y) \rangle_{L^2([0,\infty[,\, y^\ell e^{-y} dy)}$$

$$= \frac{\Gamma(\ell+n+1)}{n!} \delta_{n,1} \quad , \ell = 3/2 \, , n = 1$$

$$= \frac{4\pi}{\pi^{3/2}} \tilde{T}\tilde{n} \underbrace{\Gamma(3+1/2)}\, \delta_{n,1}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2^3}(2\cdot 3 - 1)!! = \frac{\sqrt{\pi}}{8} 1\cdot 3\cdot 5$$

$$= \frac{4}{8} \cdot 15 \, \tilde{T}\tilde{n}\, \delta_{n,1}$$

$$= \frac{15}{2} \tilde{T}\tilde{n}\, \delta_{n,1}$$ $\rightarrow$ on le savait déjà qu'il devait y avoir un $\delta_{n,1}$, car on a que a_1 dans la solution de A qui soit non nul.

On a donc : (en particulier, on voit que j_q ne dépend que de a_1 par le gaz de Maxwell)

$$j_q(r,t) = -\frac{1}{3} \frac{(kT_0)^{3/2}}{m^{1/2}} n_0 \tilde{T} \sum_{n \geq 0} a_n \frac{15}{2} \tilde{T}\tilde{n}\, \delta_{n,1} \frac{\nabla_x \tilde{T}}{\tilde{T}}$$

$$= -\frac{15}{6} \frac{(kT_0)^{3/2}}{m^{1/2}} n_0 \tilde{T}^2 \tilde{n} \, a_1 \frac{\nabla_x \tilde{T}}{\tilde{T}}$$

$$= -\frac{5}{2} \frac{(kT_0)^{3/2}}{m^{1/2}} n_0 \tilde{n} \tilde{T} a_1 \nabla_x \tilde{T}$$

$$= -\frac{5}{2} \frac{k^2 \sqrt{T_0}}{\sqrt{mk}} n T a_1 \nabla_x \tilde{T} \quad ; \; x = \frac{1}{\lambda} r \; ; \quad \nabla_x = \lambda \nabla_r \quad ; \; \lambda = \frac{1}{2\pi n_0 \sigma}$$

$$= -\frac{5}{2} \frac{k^2 \lambda}{\sqrt{mkT_0}} n T a_1 \nabla_r T$$

$$= -\lambda_{th} \nabla_r T$$

Ce qui est la loi de Fourier, avec coefficient de conductivité thermique donné par

$$\lambda_{th} = \frac{5}{2} \frac{k^2 \lambda}{\sqrt{mkT_0}} n T a_1$$

Cette expression est assez différente de celle de Chapman dans lequel (je pense que c'est à cause des adimensionalisations)

$$\lambda_{th} = -\frac{5}{2} \frac{k^2 T}{m} a_1 \quad ; \quad a_1 = -\frac{3\mu}{2kT} \; ; \; \mu = \frac{1}{3\pi}\left(\frac{2m}{\varkappa}\right)^{1/2} \frac{kT}{A_2(5)} \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{m}{2\varkappa}\right)^{1/2} \frac{1}{A_2(5)}$$

Je suppose que mes calculs sont justes, et égale les deux λ_{th} pour trouver l'expression de a_1 correspondante dans mon cas.
On a alors :

$$\boxed{a_1 = \frac{1}{\pi} \frac{1}{n\lambda} \sqrt{\frac{kT_0}{2\varkappa}} \frac{1}{A_2(5)}} = -\frac{1}{n\lambda}\sqrt{\frac{kT_0}{m}}\, a_1^{\text{Chapman}} \; , \; A_2(5) = 0.436\ldots \quad (\text{Chapman p. 172})$$

de sorte que :

$$\boxed{\lambda_{th} = \frac{5}{2} \frac{1}{\pi} k^2 T \frac{1}{\sqrt{2m\varkappa}} \frac{1}{A_2(5)}}$$

et aussi, résultat auxiliaire :

$$\Phi^{(c)}(x,u,\tau) = a_1 S^{(1)}_{3/2}\left(\frac{w^2}{2\tilde{T}}\right) w \; + \text{ partie visqueuse}$$

Part 1 : Calcul t_σ : reformulation pour LaTeX : calcul de j_q ~~À Latex-er~~ V

Le courant d'énergie $j_q(r,t)$ est défini microscopiquement par (1.22), c'est-à-dire

$$j_q(r,t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3p \; \frac{p-mv}{m} \frac{(p-mv)^2}{2m} \; f_e(r,p,t)\, \Phi^{(1)}(r,p,t) \qquad (*)$$

On va voir que dans le calcul de $j_q(r,t)$, n'intervient en général (c'est-à-dire pour un gaz non forcément maxwellien) que le coefficient a_1 du développement (5.32). Pour calculer j_q, nous commençons par mettre en évidence les unités dans $(*)$ en utilisant les définitions de la section 2.1.3 :

$$f_e(r,p,t) = \frac{n_0}{(mk T_0)^{3/2}}\, f_e(x,u;\tau) \;;\quad f_e(x,u;\tau) = \frac{\tilde n(x,\tau)}{(2\pi \tilde T(x,\tau))^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{W^2}{\tilde T(x,\tau)}\right) \qquad (*\,\text{bis})$$

$$\Phi^{(1)}(r,p,t) = \Phi^{(1)}(x,u;\tau)$$

$$p = \sqrt{mkT_0}\; u \qquad W = u - c(x,\tau)$$

$$v = \sqrt{\frac{kT_0}{m}}\; c.$$

On obtient ainsi

$$j_q(r,t) = \frac{1}{2}\frac{(kT_0)^{3/2}}{m^{1/2}}\, n_0 \int_{\mathbb{R}^3} d^3W \; W\, W^2 f_e(x,u;\tau)\, \Phi^{(1)}(x,u;\tau) \qquad (**)$$

Dans l'expression de $\Phi^{(1)}(x,u;\tau)$ donnée par (5.21), le terme proportionnel au tenseur des contraintes Λ correspond à la partie visqueuse du problème et ne contribue pas au courant d'énergie j_q, si bien que l'expression de $\Phi(x,u;\tau)$ à insérer dans $(**)$ est

$$\Phi^{(1)}(x,u;\tau) = A(W)\, W \cdot \frac{\nabla_x \tilde T(x,\tau)}{\tilde T(x,\tau)},$$

ainsi

$$j_q(r,t) = \frac{1}{2}\frac{(kT_0)^{3/2}}{m^{1/2}}\, n_0 \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3W\; W\, W^2 f_e(x,u;\tau)\, A(W)\, W}_{= \frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}^3} d^3u\; f_e(x,u;\tau)\, W^4 A(W)} \frac{\nabla_x \tilde T}{\tilde T} \qquad (***)$$

Or grâce aux invariants de collision qui permettent d'écrire (voir (1.11))

$$0 = \int_{\mathbb{R}^3} d^3W\; W\, f_e(x,u;\tau)\, \Phi^{(1)}(x,u;\tau) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3W\; f_e(x,u;\tau)\, W^2 A(W) \frac{\nabla_x \tilde T}{\tilde T},$$

on peut ajouter par exemple $-\frac{5}{2} 2\tilde T W^2$ dans l'intégrand de $(***)$ sans changer la valeur de j_q, ce qui donne

$$j_q(r,t) = \frac{1}{2}\frac{(kT_0)^{3/2}}{m^{1/2}}\, n_0\, \frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}^3} d^3W\; f_e(x,u;\tau)\, A(W)\left(W^4 - \frac{5}{2} 2\tilde T W^2\right) \frac{\nabla_x \tilde T}{\tilde T}$$

$$= \frac{1}{3}\frac{(kT_0)^{3/2}}{m^{1/2}}\, n_0\, \tilde T \int_{\mathbb{R}^3} d^3W\; A(W)\, W\, f_e(x,u;\tau) \underbrace{\left(\frac{W^2}{2\tilde T} - \frac{5}{2}\right) W}_{\overset{(5.22)}{=} L[A(W)W] \overset{(\text{eq p.11})}{=} -S^{(1)}_{3/2}\left(\frac{W^2}{2\tilde T}\right) W} \frac{\nabla_x \tilde T}{\tilde T}.$$

Insérant le développement (5.31)

$$A(W) = \sum_{n\geq 0} a_n\, S^{(n)}_{3/2}\left(\frac{W^2}{2\tilde T}\right)$$

dans j_q on a

$$j_q(r,t) = -\frac{1}{3}\frac{(kT_0)^{3/2}}{m^{1/2}}\, n_0 \tilde T \sum_{n\geq 0} a_n I_n \frac{\nabla_x \tilde T}{\tilde T},$$

avec I_n qui peut être calculé explicitement en utilisant la relation d'orthogonalité (3.18) des polynômes de Sonine :

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^3} d^3W\; f_e(x,u;\tau)\, S^{(n)}_{3/2}\left(\frac{W^2}{2\tilde T}\right) W\, S^{(1)}_{3/2}\left(\frac{W^2}{2\tilde T}\right) W$$

Utilisant l'expression (* bis) de $f_e(x,u;\tau)$, le changement de variables $x = w/\sqrt{2\tilde{T}}$, les coordonnées sphériques puis le changement de variables $y = x^2$, on obtient

$$I_n = \frac{4\pi}{\pi^{3/2}} \tilde{T}\tilde{n} \left\langle S^{(n)}_{3/2}(y) \middle| S^{(1)}_{3/2}(y) \right\rangle_{L^2([0,\infty[, y^e e^{-y} dy)} \overset{(3.18)}{=} \frac{15}{2} \tilde{T}\tilde{n}\, \delta_{n,1}$$

L'expression de j_q avec $x = 1/\lambda_{mfp}\, r$ et $\tilde{T}(x,\tau) = T(x,\tau)/T_0$ ainsi obtenue macroscopiquement permet d'établir le lien avec la loi macroscopique de Fourier :

$$j_q(r,t) = -\frac{5}{2} \frac{k^2 \tilde{T}(r,t)\, n \lambda_{mfp}^{(r,t)}}{\sqrt{mkT_0}} a_1 \nabla_r T(r,t) \;\equiv\; -\lambda(r,t) \nabla_r T(r,t),$$

$$\lambda(r,t) = \frac{5}{2} \frac{k^2 \tilde{T}(r,t)\, n \lambda_{mfp}^{(r,t)}}{\sqrt{mkT_0}} a_1 .$$

Le coefficient a_1, défini comme étant la projection de la solution sur le polynôme de Sonine $S^{(1)}_{3/2}\left(\frac{w^2}{2\tilde{T}}\right)$, contient toute la physique microscopique du problème et dépend donc de , la forme de l'interaction entre les particules. L'expression de a_1 s'établit en partie numériquement par formules de quadrature, et \cite{Chapman} en donne l'expression

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \frac{1}{n\lambda_{mfp}} \sqrt{\frac{kT_0^3}{2\varkappa}} \frac{1}{A_2(5)} ; \qquad A_2(5) = 0.436\ldots,$$

de sorte que

$$\lambda = \frac{5}{2} \frac{1}{\pi} \frac{k^2 T(r,t)}{\sqrt{2m\varkappa}} \frac{1}{A_2(5)},$$

avec $\varkappa$ l'amplitude de la force définie par (3.2). Il s'agit de l'expression que l'on peut retrouver dans la littérature (voir Chapman, Kreuzer).

$$a_1^{moi} = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{n}\,\frac{1}{\lambda}\,\sqrt{\frac{k_B \tau_0}{2\varkappa}}\,\frac{1}{A_2(5)}$$

$$b_0^{moi} = -\frac{1}{3\pi}\sqrt{\frac{2k_B\tau_0}{\varkappa}}\,\frac{1}{A_2(5)}\,\frac{1}{\lambda}\,\frac{1}{n}$$

$$a_1^{livre} = -\frac{3\mu}{2kT} = -\frac{\cancel{3}}{2\cancel{kT}}\,\frac{1}{\cancel{3}\pi}\sqrt{\frac{2m}{\varkappa}}\,\frac{\cancel{kT}}{A_2(5)}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2m}{\varkappa}}\,\frac{1}{A_2(5)}$$

$$b_0^{livre} = \frac{\mu}{kT} = \frac{1}{3\pi}\sqrt{\frac{2m}{\varkappa}}\,\frac{1}{A_2(5)}$$

$$\frac{a_1^{moi}}{a_1^{livre}} = -\frac{1}{\cancel{\pi}}\,\frac{1}{n}\,\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{k_B\tau_0}{2\cancel{\varkappa}}}\,\cancel{\frac{1}{A_2(5)}}\;2\cancel{\pi}\sqrt{\frac{\cancel{\varkappa}}{2m}}\;\cancel{A_2(5)}$$

$$= -\frac{1}{n\lambda}\cdot\cancel{2}\sqrt{\frac{k_B\tau_0}{\cancel{4}\,m}}$$

$$= -\frac{1}{n\lambda}\sqrt{\frac{k_B\tau_0}{m}} \implies \boxed{a_1^{moi} = -\frac{1}{n\lambda}\sqrt{\frac{k_B\tau_0}{m}}\;a_1^{livre}}$$

$$\frac{b_0^{moi}}{b_0^{livre}} = -\frac{\cancel{1}}{\cancel{3\pi}}\sqrt{\frac{\cancel{2}k_B\tau_0}{\cancel{\varkappa}}}\,\cancel{\frac{1}{A_2(5)}}\,\frac{1}{n\lambda}\cdot\cancel{3\pi}\,\cancel{A_2(5)}\sqrt{\frac{\cancel{\varkappa}}{\cancel{2}m}}$$

$$= -\frac{1}{n\lambda}\sqrt{\frac{k_B\tau_0}{m}}$$

$$\implies \boxed{b_0^{moi} = -\frac{1}{n\lambda}\sqrt{\frac{k_B\tau_0}{m}}\;b_0^{livre}}$$

ok

~~→ différence : τ_0~~

~~… erreur ?~~

~~→ Le vérifier !~~

~~ce serait bien d'avoir les mêmes facteurs car cela permettrait d'utiliser les résultats du livre.~~

Équation de Boltzmann :

$$\cos\chi = \frac{p-p_1}{|p-p_1|}\cdot\frac{p^f-p_1^f}{|p^f-p_1^f|} \;;\; e' = \frac{p^f-p_1^f}{|p^f-p_1^f|} \;;\; p^f = \frac{1}{2}(p+p_1+|p-p_1|e') \quad p_1^f = \frac{1}{2}(p+p_1-|p-p_1|e')$$

$$\frac{\hat{D}}{\hat{D}t} f_1(r,p,t) = \left(\frac{N}{V}\right)\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3p_1\, d^2e'\, |p_1-p|\cdot\sigma(\chi,|p_1-p|)\left(f_1(r,p^f,t)\,f_1(r,p_1^f,t) - f_1(r,p,t)\,f_1(r,p_1,t)\right)}_{:=\,J(f_1)}$$

- approximation hydrodynamique:

$$f_1(r,p,t) = \underbrace{f_1^{(0)}(r,p,t)}_{\text{équilibre}} + f_1^{(0)}(r,p,t)\,\Phi_c(r,p,t) = f_1^{(0)}(r,p,t)\left(1+\Phi_c(r,p,t)\right)$$

$$f_1^{(0)}(r,p,t) = \left(2m\pi k_B T(r,t)\right)^{-3/2}\exp\left(-\frac{(p-mv)^2}{2mk_BT(r,t)}\right)$$

- hypothèse: on se place à l'équilibre $T\neq T(r,t)$: $T=$ cte $\Longrightarrow$

$$\boxed{f_1^{(0)}(r,p,t) = f_1^{(0)}(p) = \left(2m\pi k_B T(r,t)\right)^{-3/2}\cdot\exp\left(-\frac{(p-mv)^2}{2mk_BT}\right)}$$

- linéarisation du terme de collision:

$$J(f_1) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3p_1\,d^2e'\,|p_1-p|\,\sigma(\chi,|p_1-p|)\Big(f_1^{(0)}(p^f)\,f_1^{(0)}(p_1^f)\left(1+\Phi_c(r,p^f,t)\right)\left(1+\Phi_c(r,p_1^f,t)\right) - f_1^{(0)}(p)\,f_1^{(0)}(p_1)\left(1+\Phi_c(r,p,t)\right)\left(1+\Phi_c(r,p_1,t)\right)\Big)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} d^3p_1\,d^2e'\,|p_1-p|\,\sigma(\chi,|p_1-p|)\Big(f_1^{(0)}(p^f)\,f_1^{(0)}(p_1^f)\left(1+\Phi_c(r,p_1^f,t)+\Phi_c(r,p^f,t)+o(\Phi^2)\right) - f_1^{(0)}(p)\,f_1^{(0)}(p_1)\left(1+\Phi_c(r,p,t)+\Phi_c(r,p_1,t)+o(\Phi^2)\right)\Big)$$

- or le thm. d'équilibre local affirme que (si $F=0$, mais tjs vrai si f est maxwellienne)

$$\frac{\partial}{\partial t}f(v) = 0 \iff f(v)\,f(v_1) = f(v')\,f(v_1')$$

$\Longrightarrow$

$$\underbrace{J(f_1)}_{\text{nomme}:\,-I[\Phi]} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3p_1\,d^2e'\,|p_1-p|\,\sigma(\chi,|p_1-p|)\,f_1^{(0)}(p)\,f_1^{(0)}(p_1)\left(\Phi_c(r,p_1^f,t)+\Phi_c(r,p^f,t)-\Phi_c(r,p,t)-\Phi_c(r,p_1,t)\right) + o(\Phi^2)$$

- en résumé:

$$\frac{\hat{D}}{\hat{D}t} f_1(r,p,t) = -\left(\frac{N}{V}\right) I[\Phi]$$

$$\frac{\hat{D}}{\hat{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m}\cdot\nabla_r + m\vec{F}(r)\cdot\nabla_p$$

$$I[\Phi] = f_1^{(0)}(p)\int_{\mathbb{R}^3} d^3p_1\,d^2e'\,|p_1-p|\,\sigma(\chi,|p_1-p|)\,f_1^{(0)}(p_1)\left(\Phi_c(r,p,t)+\Phi_c(r,p_1,t)-\Phi_c(r,p_1^f,t)-\Phi_c(r,p^f,t)\right)$$

$$\cos\chi = \frac{p-p_1}{|p-p_1|}\cdot\frac{p^f-p_1^f}{|p^f-p_1^f|}$$

$$e' = \frac{p^f-p_1^f}{|p^f-p_1^f|} \Longrightarrow \begin{cases} p^f = \frac{1}{2}(p+p_1+|p-p_1|e') \\ p_1^f = \frac{1}{2}(p+p_1-|p-p_1|e')\end{cases}$$

} tout en termes de p, p_1, e'
p est fixé dans les intégrations!

- calcul du membre de gauche de l'équation de Boltzmann

$$\frac{\hat{D}}{\hat{D}t} f_1(r,p,t) = \frac{\hat{D}}{\hat{D}t}\underbrace{f_1^{(0)}(r,p,t)}_{=f_1^{(0)}(p)} + \frac{\hat{D}}{\hat{D}t}\underbrace{f_1^{(0)}(r,p,t)}_{=f_1^{(0)}(p)}\,\Phi_c(r,p,t)$$

hyp. $v\neq v(r,t)$, $p\neq p(r,t)$

$$= \left(\cancel{\frac{\partial}{\partial t}}^{\,0} + \frac{\vec{p}}{m}\cancel{\nabla_r}^{\,0} + m\cdot F(r)\cdot\nabla_p\right)f_1^{(0)}(p) + \left(\frac{\hat{D}}{\hat{D}t}f_1^{(0)}(p)\right)\Phi_c(r,p,t) + f_1^{(0)}(p)\,\frac{\hat{D}}{\hat{D}t}\Phi_c(r,p,t)$$

$$= \left(1+\Phi_c(r,p,t)\right)\, m\cdot\vec{F}(r)\cdot\vec{\nabla}_p\left(\frac{1}{2m\pi k_BT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{(p-mv)^2}{2mk_BT}\right) + f_1^{(0)}(p)\frac{\hat{D}}{\hat{D}t}\Phi_c(r,p,t)$$

$$= f_1^{(0)}(p)\frac{\hat{D}}{\hat{D}t}\Phi_c(r,p,t) + \left(1+\Phi_c(r,p,t)\right) m\cdot\sum_{i=1}^{3}F_i(r)\frac{\partial}{\partial p_i}\left(2m\pi k_BT\right)^{-3/2}\prod_{j=1}^{3}\exp\left(-\frac{(p-mv)_j^2}{2mk_BT}\right)$$

$$= f_1^{(0)}(p)\frac{\hat{D}}{\hat{D}t}\Phi_c(r,p,t) + \left(1+\Phi_c(r,p,t)\right)\cdot m\sum_{i=1}^{3}F_i(r)\left(2m\pi k_BT\right)^{-3/2}\prod_{j=1}^{3}\frac{-2(p-mv)_i}{2mk_BT}\exp\left(-\frac{(p-mv)_j^2}{2mk_BT}\right)$$

- Membre de ~~gauche~~ droite :

$$f_1 = f_1^{(0)} + \underbrace{f_1^{(0)}\Phi_c}_{=\delta f_1}$$

non lin. (J est non linéaire)

$$\mathcal{J}_c(f_1) = \mathcal{J}_c(f_1^{(0)}+\delta f_1) \stackrel{\text{non lin.}}{=} \underbrace{\cancel{\mathcal{J}_c(f_1^{(0)})}}_{=0 \text{ (OA)}} + \underbrace{\mathcal{I}_c(\delta f_1)}_{=O(\delta)} + \cancel{O(\delta^2)}^{\to 0}$$

- membre de gauche :

$$\tilde{D} f_1 = \tilde{D} f_1^{(0)} + \tilde{D}\,\delta f_1 \qquad \text{: linéaire}$$

- avec l'équation de Boltzmann :

$$\tilde{D}\,\delta f_1 = \mathcal{J}_c(\delta f_1) = \left(\frac{N}{V}\right) \int |p_1 - p|\,\sigma\,\left(O(\delta^2)\right)$$

$$\Rightarrow \tilde{D}\,\delta f_1 = O(\delta^2) \to 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{D} f_1 = \mathcal{I}_c(\delta f_1)}$$

$$= f_1^{(0)}(p)\,\frac{\tilde{D}}{\tilde{D}t}\,\Phi_c(r,p,t) + \left(1+\Phi_c(r,p,t)\right) m \sum_{i=1}^{3} F_i(r)\,(2m\pi k_BT)^{-3/2}\,(-1)\,\frac{\cancel{2}(p-mv)_i}{\cancel{2}mk_BT}\,e^{-\frac{(p-mv)^2}{2mkT}}$$

$$= f_1^{(0)}(p)\,\frac{\tilde{D}}{\tilde{D}t}\,\Phi_c(r,p,t) + \left(1+\Phi_c(r,p,t)\right) \cancel{m}\; \bar{F}(\bar{r})\cdot(\bar{p}-m\bar{v})\cdot(-1)\,\frac{1}{\cancel{m}k_BT}\cdot f_1^{(0)}(p)$$

$$= f_1^{(0)}(p)\cdot\left(\frac{\tilde{D}}{\tilde{D}t}\,\Phi_c(r,p,t) - \frac{\bar{F}(\bar{r})\cdot(\bar{p}-m\bar{v})}{k_BT}\left(1+\Phi_c(r,p,t)\right)\right)$$

- en simplifiant $f_1^{(0)}(p)$, l'équation de Boltzmann devient donc:

$$\boxed{\frac{\tilde{D}}{\tilde{D}t}\,\Phi_c(r,p,t) - \left(1+\Phi_c(r,p,t)\right)\frac{\bar{F}(\bar{r})\cdot(\bar{p}-m\bar{v})}{k_BT} = -\left(\frac{N}{V}\right) I[\Phi]}$$

$$\frac{\tilde{D}}{\tilde{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\bar{p}}{m}\cdot\nabla_r + m\cdot\bar{F}(\bar{r})\cdot\bar{\nabla}_p$$

$$I[\Phi] = \int_{\mathbb{R}^3\times S^2} d^3p_1\, d^2e'\, |p_1-p|\,\sigma(\chi,|p_1-p|)\, f_1^{(0)}(p_1)\cdot\left(\Phi_c(r,p,t) + \Phi_c(r,p_1,t) - \Phi_c(r,p_1^f,t) - \Phi_c(r,p^f,t)\right)$$

$$\cos\chi = \frac{p-p_1}{|p-p_1|}\cdot\frac{p^f-p_1^f}{|p^f-p_1^f|}$$

$$e' = \frac{p^f-p_1^f}{|p^f-p_1^f|} \implies \begin{aligned} p^f &= \tfrac{1}{2}\left(p+p_1+|p-p_1|e'\right) \\ p_1^f &= \tfrac{1}{2}\left(p+p_1-|p-p_1|e'\right)\end{aligned} \quad \text{; variable : } p, p_1, e'$$

- remarque : 1) si $\bar{F}(r) = 0$, alors on retrouve bien l'équation dans le livre "The Boltzmann Equation", Cohen, Springer-Verlag. Par contre, en aucun cas on retrouve le résultat du Kreuzer.
  2) Problème très différent de ce qui est présenté dans le Kreuzer : le terme de gauche ne peut plus être calculé explicitement ! Je vais devoir continuer sur des équations sensiblement différentes de celles du Kreuzer...

- petit paramètre :

$$\left\{ \varepsilon = \frac{m\cdot a\cdot\lambda}{k_B T} = \frac{m\,F\cdot\lambda}{k_BT} \ll 1 \right.$$

- avec $F = \sup_{r\in\mathbb{R}^3} |\bar{F}(\bar{r})|$ la force par unité de masse (= accélération) subie par la particule à cause du champ de forces externe

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{2\pi n r} \\ \tau = \sqrt{\dfrac{k_BT}{m}}\cdot\dfrac{1}{\lambda}\, t \\ \bar{c} = \sqrt{\dfrac{m}{k_BT}}\,\bar{v} \\ \bar{u} = \dfrac{1}{\sqrt{mk_BT}}\,\bar{p} \\ \bar{x} = \dfrac{1}{\lambda}\bar{r} \end{cases}$$

: libre parcours moyen
r : rayon de la particule ; n : densité de particules

$$\implies f_1^{(0)}(\bar{p}) = \cancel{n}(2m\pi k_BT)^{-3/2}\cdot\exp\left(-\frac{(\bar{p}-m\bar{v})^2}{2mk_BT}\right)$$

$$f_1^{(0)}(\bar{u}) = \cancel{n}(2m\pi k_BT)^{-3/2}\cdot\exp\left(-\frac{1}{2mk_BT}\cdot\left(\sqrt{mk_BT}\,\bar{u} - m\sqrt{\frac{k_BT}{m}}\,\bar{c}\right)^2\right)$$

$$= \cancel{n}\underbrace{(2m\pi k_BT)^{-3/2}}_{\text{normalisation pas correcte : }(2\pi)^{-3/2}}\cdot\exp\left(-\tfrac{1}{2}(u-c)^2\right)$$

$$d^3u_1 = |J|\, d^3p_1 = (mk_BT)^{3/2}\, d^3p_1$$

$$\boxed{f_1^{(0)}(u) = (2\pi)^{-3/2}\exp\left(-\frac{1}{2}(u-c)^2\right) \text{ avec } d^3u_1}$$

$$\implies I[\Phi] = \int_{\mathbb{R}^3} d^3u_1 \int_{\mathbb{R}^2} \underbrace{d^2e'}_{\text{invariant sous ce chgt. de variables}}\, |u_1-u|\,\sqrt{mk_BT}\;\sigma\big(\underbrace{\chi}_{\text{invariant sous ce chang. de variables}}, \sqrt{mk_BT}\,|u_1-u|\big)\, f_1^{(0)}(u_1)\,(\ldots)$$

$$\cos\chi = \frac{u-u_1}{|u-u_1|}\cdot\frac{u^f-u_1^f}{|u^f-u_1^f|}$$

$$e' = \frac{u^f-u_1^f}{|u^f-u_1^f|}$$

$$\Rightarrow I[\Phi] = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3u_1 \int_{\mathbb{R}^3} d^2e' \, |u_1-u| \sqrt{mk_BT}\, \sigma(x, \sqrt{mk_BT}\,|u_1-u|)\, f_1^{(0)}(u)}_{\text{sans dimension}} \cdot \underbrace{\left(\Phi_c(r,u,\tau)\Phi_c(r,u_1,\tau) - \Phi_c(r,u_1^f,\tau)\cdot\Phi_c(r,u^f,\tau)\right)}_{\text{sans dimension}}$$

$$f_1^{(0)}(u) = (2\pi)^{-3/2} \exp\left(-\tfrac{1}{2}(\bar u - \bar c)^2\right)$$

$$\frac{\tilde D}{\tilde D t} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\bar p}{m}\cdot\nabla_r + m\cdot \bar F(r)\cdot \bar\nabla_p \quad ; \quad \tau = \sqrt{\frac{k_BT}{m}}\frac{1}{\lambda}t \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \tau} = \lambda\sqrt{\frac{m}{k_BT}}\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\bar u = \frac{1}{\sqrt{mk_BT}}\bar p \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar u} = \sqrt{mk_BT}\frac{\partial}{\partial \bar p}$$

$$\Rightarrow \frac{\tilde D}{\tilde D t} = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{k_BT}{m}}\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\sqrt{mk_BT}}{m}\bar u\cdot\nabla_{\bar r} + m\cdot \bar F(r)\frac{1}{\sqrt{mk_BT}}\cdot\nabla_{\bar u}$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\frac{k_BT}{m}}\cdot\frac{1}{\lambda} &= \left[\frac{1}{s}\right]\\ \sqrt{\frac{m}{k_BT}} &= \left[\frac{s}{m}\right]\end{aligned}\right\}\text{veut}: \left[\frac{1}{m}\right] \Rightarrow \left[\frac{1}{m}\right] = \left[\frac{s}{m}\right]\cdot\left[\frac{1}{s}\right] = \sqrt{\frac{m}{k_BT}}\cdot\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{k_BT}{m}} = \frac{1}{\lambda} \quad !!!$$

$$\Rightarrow \bar X = \frac{1}{\lambda}\bar r \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar x} = \lambda\frac{\partial}{\partial \bar r}$$

$$\Rightarrow \frac{\tilde D}{\tilde D t} = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{k_BT}{m}}\frac{\partial}{\partial \tau} + \sqrt{\frac{k_BT}{m}}\,\bar u\cdot\frac{1}{\lambda}\bar\nabla_X + \sqrt{\frac{m}{k_BT}}\bar F(r)\cdot\nabla_{\bar u}$$

$$\Rightarrow \quad = \left(\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{k_BT}{m}}\right)\frac{\partial}{\partial \tau} + \left(\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{k_BT}{m}}\right)\bar u\cdot\bar\nabla_X + \underbrace{\left(\sqrt{\frac{m}{k_BT}}\bar F(r)\right)}_{\text{unités}: [s^{-1}]}\cdot\bar\nabla_u$$

• et:

$$\underbrace{\frac{\bar F(r)\cdot(\bar p - m\bar v)}{k_BT}}_{\text{unités}: [s^{-1}]} = \frac{\bar F(r)\cdot\left(\sqrt{mk_BT}\,\bar u - m\cdot\sqrt{\frac{k_BT}{m}}\,\bar c\right)}{k_BT} = \bar F(r)\frac{\sqrt{mk_BT}}{k_BT}\cdot(\bar u - \bar c) = \sqrt{\frac{m}{k_BT}}\cdot\bar F(r)\cdot(\bar u - \bar c)$$

• le membre de gauche devient donc:

$$\left.\begin{aligned}&\left(\left(\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{k_BT}{m}}\right)\frac{\partial}{\partial\tau} + \left(\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{k_BT}{m}}\right)\bar u\cdot\bar\nabla_X + \left(\sqrt{\frac{m}{k_BT}}\bar F(r)\right)\cdot\bar\nabla_u\right)\Phi_c(r,p,t)\\ &\quad - (1+\Phi_c(r,p,t))\left(\sqrt{\frac{m}{k_BT}}\bar F(r)\right)\cdot(\bar u - \bar c)\end{aligned}\right\}\text{dimension}: [s^{-1}]$$

• il faut encore identifier les dimensions du terme de collision
↳ quelle est la dimension de la section efficace ? Il faut que

$$[s^{-1}] = \left[\frac{N}{V}\cdot\sqrt{mk_BT}\cdot\sigma\right] = \frac{kg\cdot m^{\text{mètre}}}{s}\cdot\frac{\#\,\text{particules}}{m^{3}}\cdot[\sigma] = \frac{1}{s}\frac{kg\cdot\#\text{part.}}{m^2}[\sigma]$$

$$\cancel{= \frac{\text{nb. particules}}{m^3}\cdot\frac{kg\cdot m}{s}[\sigma]}$$

$$\cancel{= s^{-1}\frac{kg}{m^2}\cdot\text{nb. particules}\,[\sigma] \Rightarrow [\sigma] = \frac{m^2}{kg\cdot\text{nb. particules}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{[\sigma] = \frac{m^2}{kg\cdot\#\,\text{particules}}} \quad !!!$$

• l'équation de Boltz. devient:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau} + \bar u\nabla_X + \left(\underbrace{\sqrt{\frac{m}{k_BT}}\cdot\bar F(r)\cdot\sqrt{\frac{m}{k_BT}}\lambda}_{=\frac{m\lambda F}{k_BT}\frac{\bar F(r)}{F}}\right)\bar\nabla_u\right)\Phi_c(r,p,t) - (1+\Phi_c(r,p,t))\left(\underbrace{\sqrt{\frac{m}{k_BT}}\cdot\sqrt{\frac{m}{k_BT}}\lambda}_{=\frac{m\lambda F}{k_BT}\frac{\bar F(r)}{F}}\right)\bar F(r)\cdot(\bar u - \bar c)$$

$$= -\left(\frac{N}{V}\right)\lambda\sqrt{\frac{m}{k_BT}}\,I[\Phi]$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\bar{u}\cdot\bar{\nabla}_x+\underbrace{\frac{m\lambda F}{k_BT}}_{=\varepsilon}\frac{\bar{F}(r)}{F}\cdot\nabla_u\right)\bar{\Phi}_c(r,p,t)-(1+\bar{\Phi}_c(r,p,t))\underbrace{\frac{m\lambda F}{k_BT}}_{=\varepsilon}\frac{\bar{F}(r)}{F}\cdot(\bar{u}-\bar{c})=-\left(\frac{N}{V}\right)\lambda\sqrt{\frac{m}{k_BT}}\,I[\Phi]$$

- choix du repère : $\hat{e}_z \,//\, \bar{F}(r)$: hypothèse : $\bar{F}(r)$ ne varie pas en direction mais uniquement en amplitude $\Rightarrow \bar{F}(r)\cdot\nabla_{\bar{u}} = F(r)\cdot\frac{\partial}{\partial u_z}$; $\bar{F}(r)=(0,0,F(r))$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\bar{u}\cdot\bar{\nabla}_x+\varepsilon\frac{F(r)}{F}\frac{\partial}{\partial u_z}\right)\bar{\Phi}(r,p,t)-(1+\bar{\Phi}_c(r,p,t))\,\varepsilon\frac{F(r)}{F}(u_z-c_z)=-\left(\frac{N}{V}\right)\lambda\sqrt{\frac{m}{k_BT}}\,I[\Phi]$$

- changement de variable : Force normalisée :

$$G(r)=\frac{F(r)}{F}\quad,\quad F=\sup_{r\in\mathbb{R}^3}|\bar{F}(r)|$$

$\Longrightarrow$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\bar{u}\cdot\bar{\nabla}_x+\varepsilon\,G(r)\frac{\partial}{\partial u_z}\right)\bar{\Phi}_c(x,u,\tau)-(1+\bar{\Phi}_c(x,u,\tau))\,\varepsilon\,G(r)(u_z-c_z)=$$

$$-\left(\frac{N}{V}\right)\underbrace{\lambda\sqrt{\frac{m}{k_BT}}\sqrt{mk_BT}}_{=\lambda\cdot m}\int_{\mathbb{R}^3}du_1\int_{\mathbb{R}^2}de'\,|u_1-u|\,\sigma(\chi,\sqrt{mk_BT}|u_1-u|)\,f_1^{(0)}(u)\Big(\bar{\Phi}_c(x,u,\tau)+\bar{\Phi}_c(x,u_1,\tau)-\bar{\Phi}_c(x,u_1^f,\tau)-\bar{\Phi}_c(x,u^f,\tau)\Big)$$

- Conclusion :

$=\rho \Rightarrow$ unité de σ : $[1/J]=[\rho\lambda\sigma]$ $\Rightarrow [\sigma]=[\rho\lambda]^{-1}=[\frac{kg}{m^3}m]^{-1}=\frac{m^2}{kg}$

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{D}{D\tau}\bar{\Phi}_c(x,u,\tau)-(1+\bar{\Phi}_c(x,u,\tau))\,\varepsilon\,G(r)(u_z-c_z)=-\left(\frac{N}{V}\right)\lambda\,m\cdot\tilde{I}[\Phi]\\&\tilde{I}[\Phi]=\int_{\mathbb{R}^3}d^3u_1\int_{\mathbb{R}^2}d^2e'\,|u_1-u|\,\sigma(\chi,\sqrt{mk_BT}|u_1-u|)\,f_1^{(0)}(u_1)\Big(\bar{\Phi}_c(x,u,\tau)+\bar{\Phi}_c(x,u_1,\tau)-\bar{\Phi}_c(x,u_1^f,\tau)-\bar{\Phi}_c(x,u^f,\tau)\Big)\end{aligned}}$$

$\frac{D}{D\tau}=\frac{\partial}{\partial\tau}+\bar{u}\cdot\bar{\nabla}_x+\varepsilon\,G(r)\frac{\partial}{\partial u_z}$

$\cos\chi=\frac{u-u_1}{|u-u_1|}\cdot\frac{u^f-u_1^f}{|u^f-u_1^f|}$

$e'=\frac{u^f-u_1^f}{|u^f-u_1^f|} \Rightarrow u^f=1/2(u+u_1+|u-u_1|e')$, $u_1^f=1/2(u+u_1-|u-u_1|e')$: variables $\underbrace{u,u_1,e'}_{\text{intégr.}}$, u fixe

$\varepsilon=\frac{m\lambda F}{k_BT}$; $F=\sup_{r\in\mathbb{R}^3}|\bar{F}(r)|$

$G(r)=\frac{F(r)}{F}$; $\bar{F}(r)=(0,0,F(r))$

$\lambda=\frac{1}{2\pi n r}$, $n=\frac{N}{V}$, r = rayon particule

$\tau=\sqrt{\frac{k_BT}{m}}\frac{1}{\lambda}t$

$\bar{c}=\sqrt{\frac{m}{k_BT}}\,\bar{V}$

$\bar{u}=\frac{1}{\sqrt{mk_BT}}\bar{p}$

$\bar{x}=\frac{1}{\lambda}\bar{r}$

$f_1^{(0)}(u)=(2\pi)^{-3/2}e^{-\frac{1}{2}(\bar{u}-\bar{c})^2}$

- avec les hypothèses :
  1) approximation hydrodynamique
  2) équilibre thermique : $T=$ cte $|_{r,t}$
  3) linéarisation du terme de collision
  4) $\bar{F}(r)$ (force) ne varie pas en direction mais uniquement en amplitude

↳ ⚠ On n'a pas fait l'hypothèse qui consiste à négliger $\bar{\Phi}$ dans le membre de gauche !
(si on ne peut pas continuer sans cette hyp., comme je le crois, il faudra la faire et cela simplifiera considérablement l'équation).

- application de la théorie des échelles multiples :

$$\tau = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{-k}\tau_k \qquad \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\tau} = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k \frac{\partial}{\partial\tau_k}$$

$$\Phi_c(x,u_\phi,\tau) = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k\,\Phi_c^{(k)}(x,u_\phi;\tau_0,\tau_1,\tau_2,\dots)$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k\frac{\partial}{\partial\tau_k} + \bar{u}\cdot\nabla_x + \varepsilon\,G(r)\frac{\partial}{\partial u_z}\right)\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k\,\Phi_c^{(k)}(\bar{x},\bar{u}_0,\tau_0,\tau_1\dots)$$

$$-\left(1+\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k\Phi_c^{(k)}(\bar{x},\bar{u};\tau_0,\tau_1,\dots)\right)\varepsilon\,G(r)\,(u_z-c_z) = -\left(\frac{N}{V}\right)\lambda\cdot m\;\tilde{I}[\Phi]$$

$$\tilde{I}[\Phi] = \sum_{k\geq 0}\int_{\mathbb{R}^3}d^3u_1\int_{\mathbb{R}^3}d^2e'\,|u_1-u|\,\sigma(x,\sqrt{k_BTm}\,|u_1-u|)\,f_1^{(0)}(u)$$
$$\varepsilon^k\left(\Phi_c^{(k)}(x,u;\tau_0,\tau_1\dots)\,\Phi_c^{(k)}(x,u_1;\tau_0,\tau_1\dots) - \Phi_c^{(k)}(x,u_1',\tau_0,\tau_1\dots)\,\Phi_c^{(k)}(x,u',\tau_0,\tau_1\dots)\right)$$

$$I_k[\Phi] := \int_{\mathbb{R}^3}d^3u_1\int_{\mathbb{R}^2}d^2e'\,|u_1-u|\,\sigma(x,\dots)\,f_1^{(0)}(u_1)\left(\Phi_c^{(k)}+\Phi_c^{(k)}-\Phi_c^{(k)}-\Phi_c^{(k)}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k\frac{\partial}{\partial\tau_k}+\bar{u}\nabla_x+\varepsilon G(r)\frac{\partial}{\partial u_z}\right)\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k\Phi_c^{(k)}(\bar{x},\bar{u};\{\tau\}) - \left(1+\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k\Phi_c^{(k)}(\bar{x},\bar{u};\{\tau\})\right)\varepsilon\,G(r)\,(u_z-c_z) = -\left(\frac{N}{V}\right)\lambda m\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k I_k[\Phi]}$$

- Ordres les plus bas : I

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau_0}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau_1}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial\tau_2}+\dots+\bar{u}\nabla_x+\varepsilon G(r)\frac{\partial}{\partial u_z}\right)\left(\Phi_c^{(0)}(\bar{x},\bar{u},\{\tau\})+\varepsilon\,\Phi_c^{(1)}(\bar{x},\bar{u},\{\tau\})+\varepsilon^2\Phi_c^{(2)}(\dots)+\dots\right)$$

$$-\left(1+\Phi_c^{(0)}(\bar{x},\bar{u},\{\tau\})+\varepsilon\,\Phi_c^{(1)}(\bar{x},\bar{u},\{\tau\})+\dots\right)\varepsilon\,G(r)\,(u_z-c_z)$$

$$= -\left(\frac{N}{V}\right)\lambda m\left(I_0[\Phi]+\varepsilon\,I_1[\Phi]+\varepsilon^2\,I_2[\Phi]\right)$$

$\boxed{O(\varepsilon^0)}$
$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau_0}+\bar{u}\nabla_x\right)\Phi_c^{(0)}(\bar{x},\bar{u},\{\tau\}) = -\left(\frac{N}{V}\right)\lambda m\,I_0[\Phi]$$

$\boxed{O(\varepsilon^1)}$
$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau_0}+\bar{u}\nabla_x\right)\Phi_c^{(1)}(\bar{x},\bar{u},\{\tau\}) + \left(\frac{\partial}{\partial\tau_1}+G(r)\frac{\partial}{\partial u_z}\right)\Phi_c^{(0)}(\bar{x},\bar{u},\{\tau\})$$
$$-\left(1+\Phi_c^{(0)}(\bar{x},\bar{u},\{\tau\})\right)G(r)\,(u_z-c_z) = -\left(\frac{N}{V}\right)\lambda m\;I_1[\Phi]$$

$\boxed{O(\varepsilon^2)}$
$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau_0}+\bar{u}\nabla_x\right)\Phi_c^{(2)}(\bar{x},\bar{u},\{\tau\}) + \left(\frac{\partial}{\partial\tau_1}+G(r)\frac{\partial}{\partial u_z}\right)\Phi_c^{(1)}(\bar{x},\bar{u},\{\tau\}) + \frac{\partial}{\partial\tau_2}\Phi_c^{(0)}(\bar{x},\bar{u},\{\tau\})$$
$$-\Phi_c^{(1)}(\bar{x},\bar{u},\{\tau\})\,G(r)\,(u_z-c_z) = -\left(\frac{N}{V}\right)\lambda m\;I_2[\Phi]$$

⋮

$\boxed{O(\varepsilon^k)}$ $k\geq 3$
$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau_0}+\bar{u}\nabla_x\right)\Phi_c^{(k)}(\bar{x},\bar{u},\{\tau\}) + \left(\frac{\partial}{\partial\tau_1}+G(r)\frac{\partial}{\partial u_z}\right)\Phi_c^{(k-1)}(\bar{x},\bar{u},\{\tau\}) + \sum_{i=2}^{k}\frac{\partial}{\partial\tau_i}\Phi_c^{(k-i)}(\bar{x},\bar{u},\{\tau\})$$
$$-\Phi_c^{(k-1)}(\bar{x},\bar{u},\{\tau\})\,G(r)\,(u_z-c_z) = -\left(\frac{N}{V}\right)\lambda m\;I_k[\Phi]$$

- Le problème : ce sont toutes des équations intégrales !!!

~~Hypothèses~~

~~1) Approx. hydrodynamique~~
~~2) équilibre thermique~~
~~3) linéarisation du terme de collision~~
~~4) force $F(\vec{r})$ ne varie pas en direction mais qu'en amplitude~~

~~6) hyp 6).~~

~~I ① ÉQUATIONS~~

~~5) hypothèse du membre de gauche $f = f^{(0)}(1+\Phi) \sim f^{(0)}$~~

~~plus compliqué que ① $\Longrightarrow$ Kreuzer = le plus compliqué~~

~~III Équations (Kreuzer)~~

~~6) hypothèse de vitesse homogène $V \neq V(r)$, $V \neq V(t)$, $x \neq x(t)$...~~

~~II ② Équations~~

~~SIMPLICITÉ~~

Hypothèses

1) Approx. hydrodynamique
2) Équilibre thermique
3) Linéarisation du terme de collision
4) force $F(\vec{r})$ ne varie pas en direction mais qu'en amplitude

5) Hypothèse du membre de gauche $f = f^{(0)}(1+\Phi) \sim f^{(0)}$

~~6) Hypothèse de vitesse homogène $V \neq V(r)$; $V \neq V(t)$; $x \neq x(t)$~~

III Équations (Kreuzer) le plus compliqué

~~I Équations moyennement compliqué~~

II Équations le plus simple

- Étude des différents ordres :

$\boxed{O(\varepsilon^0)}$ $\left(\frac{\partial}{\partial \tau_0} + \bar{u}\cdot\nabla_x\right)\bar{\Phi}_c^{(0)}(\bar{x}, \bar{u}, \tau_0, \tau_1, \dots) = \underbrace{-\left(\frac{N}{V}\right)\lambda m\, I_0\,[\bar{\Phi}]}_{=J\,\bar{\Phi}}$

↳ c'est *presque* l'équation de Boltzmann linéaire, sans champ de force $F=0$ externe, pour les fluctuations autour de l'équilibre. (en multipliant par $f_1^{(0)}(\rho)$) → idem livre bleu p. 144

~~↳ en effet, presque car $I_{00}[\bar{\Phi}]$ a un $f_1^{(0)}(\rho)$ qui a été simplifié~~

début de II

- etc. Cela semble bien compliqué à résoudre, alors je vais établir les équations dans l'hyp. toute du membre de gauche $f = f(1+\bar{\Phi}) \sim f$. Tout ce que cela change c'est qu'on ne peut pas simplifier $f_1^{(0)}(r)$.

$$\underbrace{\frac{\bar{D}}{\bar{D}\tau} f_1^{(0)}(u)}\; = -\left(\frac{N}{V}\right)\lambda m\int_{\mathbb{R}^3} d^3u_1\int_{\mathbb{R}^3} d^2e'\,|u_1-u|\,\sigma(x, \sqrt{m/kT}\,|u_1-u|)\, f_1^{(0)}(u) f_1^{(0)}(u_1)\left(\bar{\Phi}_c(x,u,\tau)+\bar{\Phi}_c(x,u_1,\tau)-\bar{\Phi}_c(x,u_1^f,\tau)-\bar{\Phi}_c(x,u^f,\tau)\right)$$

→ hypothèse : il n'y a pas d'inhomogénéités de vitesse $V \neq V(r)$

↳ hypothèse plus restrictive que dans le Kreuzer !!

$$= \left(\cancel{\frac{\partial}{\partial\tau}}^{\,0} + \cancel{\bar{u}\cdot\nabla_x}^{\,0} + \varepsilon G(r)\frac{\partial}{\partial u_z}\right) f_1^{(0)}(u)$$

$$\Longrightarrow \varepsilon G(r)\frac{\partial}{\partial u_z} f_1^{(0)}(u) = -\left(\frac{N}{V}\right)\lambda m\, I[\bar{\Phi}]$$

- avec $f_1^{(0)}(u) = (2\pi)^{-3/2} e^{-\frac{1}{2}(\bar{u}-\bar{c})^2}$ on trouve :

$$\varepsilon G(r)\frac{\partial}{\partial u_z} f_1^{(0)}(u) = \varepsilon G(r)\left(-\frac{1}{2}\right)\underbrace{\frac{\partial}{\partial u_z}\left(\sum_{i=1}^{3}(u_i-c_i)^2\right)}_{=2(u_z-c_z)} f_1^{(0)}(u)$$

$$= -\,\varepsilon G(r)\,(u_z-c_z)\, f_1^{(0)}(u)$$

$$\Longrightarrow +\,\varepsilon G(r)\,(u_z-c_z)\, f_1^{(0)}(u) = \left(\frac{N}{V}\right)\lambda m\, I[\bar{\Phi}]$$

- théorie des échelles multiples ⇒ II

$$\boxed{\varepsilon G(r)\,(u_z-c_z)\, f_1^{(0)}(u) = \left(\frac{N}{V}\right)\lambda m \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k I_k[\bar{\Phi}]}$$

- comparaison des différents ordres

$\boxed{O(\varepsilon^0)}$ $\left(\frac{N}{V}\right)\lambda\cdot m\, I_{00}[\bar{\Phi}] = 0$

$$\Longrightarrow \left(\frac{N}{V}\right)\lambda m\int_{\mathbb{R}^3} d^3u_1\int_{\mathbb{R}^3} d^2e'\,\underbrace{|u_1-u|\,\sigma(x,\sqrt{m/kT}\,|u_1-u|)\, f_1^{(0)}(u) f_1^{(0)}(u_1)}_{\neq 0}\left(\bar{\Phi}_c^{(0)}(x,u,\tau)+\bar{\Phi}_c^{(0)}(x,u_1,\tau)-\bar{\Phi}_c(x,u_1^f,\tau)-\bar{\Phi}_c(x,u^f,\tau)\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{\bar{\Phi}_c^{(0)}(x,u,\tau)+\bar{\Phi}_c^{(0)}(x,u_1,\tau) = \bar{\Phi}_c^{(0)}(x,u_1^f,\tau)+\bar{\Phi}_c^{(0)}(x,u^f,\tau)} \qquad \forall u, u_1, u_1^f, u^f,\ \forall x, \tau$$

→ interprétation ? Loi de conservation de... ?

→ comment déterminer $\bar{\Phi}_c^{(0)}$?...

↳ ou bien, pour être plus rigoureux, on peut laisser l'intégration.

SUITE

• Exemple : $O(\varepsilon^{k=2})$:

$$\sum_{\substack{pp' \\ p+p'=3}} (\dots) = \Phi_c^{(0)}+\Phi_c^{(2)} - \Phi_c^{(2)}\Phi_c^{(0)} + \Phi_c^{(1)}+\Phi_c^{(1)} - \Phi_c^{(1)}\Phi_c^{(1)} + \Phi_c^{(2)}+\Phi_c^{(0)} - \Phi_c^{(0)}\Phi_c^{(2)} + \cancel{\Phi_c^{(3)}+\Phi_c^{(0)} - \Phi_c^{(0)}\Phi_c^{(3)}} = 0$$

$p=0, p'=2$

$p=1, p'=1$

$p=2, p'=0$

avec : $\Phi_c^{(0)}+\Phi_c^{(0)} = \Phi_c^{(0)}\Phi_c^{(0)}$ $\Longrightarrow$ élimine des termes

~~supposons les sol à l'ordre $\Phi_c^{(1)}$ connues, alors~~

supposons les solutions connues à l'ordre $\Phi_c^{(1)}$, alors :

$$\Phi_c^{(2)}(u_1) - \Phi_c^{(2)}(u_1^t) + \Phi_c^{(1)}(u)\,\Phi_c^{(1)}(u_1) - \Phi_c^{(1)}(u^t) - \Phi_c^{(1)}(u^t) + \Phi_c^{(2)}(u) - \Phi_c^{(2)}(u) = 0$$

avec l'intégration on a :

$$G(u)(u_z - c_z) + \left(\frac{u}{v}\right)\lambda m \int\dots\int \left(\Phi_c^{(2)}(u_1) - \Phi_c^{(2)}(u_1^t) + \Phi_c^{(1)}(u_1) - \Phi_c^{(1)}(u)\right) = 0$$

$\Longrightarrow$ même équation qu'à l'ordre précédent

$\Longrightarrow$ $\boxed{\Phi_c^{(2)} = \Phi_c^{(1)}}$

• à l'ordre $O(\varepsilon^{k=3})$, on a :

$\Phi^0+\Phi^3 - \Phi^3\Phi^0$

$+\Phi^1+\Phi^2 - \Phi^2\Phi^1 \longrightarrow G(u)(u_z-c_z)$

$\Phi^2+\Phi^1 - \Phi^2\Phi^1$

$\Phi^3+\Phi^0 - \Phi^3\Phi^0$

$$\Longrightarrow G(u)(u_z-c_z) + \underbrace{\left(\frac{u}{v}\right)\lambda m \iint \dots (\text{ordre } 2)}_{= G(u)(u_z-c_z)} + \left(\frac{u}{v}\right)\lambda m \iint (\text{ordre } 3) = 0$$

$\Longrightarrow$ $2\cdot G(u)(u_z-c_z) = +\left(\frac{u}{v}\right)\iint (\text{ordre } 3)$

$\Longrightarrow$ facteur 2 de différence

$\Phi_c^{(3)} = 2\,\Phi_c^{(1)}$

• à l'ordre $O(\varepsilon^{k=4})$, on a :

$0+4 - 4\cdot 0$

$1+3 - 3\cdot 1 \longrightarrow G(u)(u_z-c_z)$

$2+2 - 2\cdot 2 \longrightarrow G(u)(u_z-c_z)$

$3+1 - 1\cdot 3 \longrightarrow 2G(u)(u_z-c_z)$

$4+0 - 0\cdot 4$

$\Phi_4^{(4)} = 4\cdot\Phi_c^{(1)}$

• à l'ordre $O(\varepsilon^{k=5})$, on a : nb. de fois $G(u)(u_z-c_z)$: $\varepsilon^1\ \varepsilon^2\ \varepsilon^3\ \varepsilon^4$: $1 + 1 + 2 + 4 = 8$

· $k=6$: $1+1+2+4+8 = 16$

· $k=7$: 32

· $k=8$: 64

$$\Longrightarrow (\Phi_c^{(0)}, \Phi_c^{(1)}, \Phi_c^{(2)}, \dots) = (\underbrace{\Phi_c^{(0)}}_{0}, \underbrace{\Phi_c^{(1)}}_{1}, \underbrace{\overset{2^0}{\Phi_c^{(1)}}}_{2}, \underbrace{\overset{2^1}{2\Phi_c^{(1)}}}_{3}, \underbrace{\overset{2^2}{4\Phi_c^{(1)}}}_{4}, \underbrace{\overset{2^3}{8\Phi_c^{(1)}}}_{5}, \dots, 2^{k-2}\Phi_c^{(1)})$$

$$\Phi_c^{(k)} = \begin{cases} \Phi_c^{(0)}, & k=0 \\ \Phi_c^{(1)}, & k=1 \\ 2^{k-2}\Phi_c^{(1)}, & k\geq 2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\Phi_c = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \Phi_c^{(k)} = \Phi_c^{(0)} + \varepsilon\Phi_c^{(1)} + \sum_{k\geq 2}\frac{(2\varepsilon)^k}{4}\Phi_c^{(1)} = \Phi_c^{(0)} + \Phi_c^{(1)}\left(\varepsilon + \frac{1}{4}\sum_{k\geq 2}(2\varepsilon)^k\right)} \longrightarrow = \frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}(2\varepsilon)^k$$

$\boxed{\text{CONVERGE ssi } \varepsilon_{\text{Thermique}} > 4\,\varepsilon_{\text{force}}}$

→ question : que peut-on en dire sur $\Phi_c^{(0)}$? indép. de x, τ

$\boxed{O(\varepsilon^1)}$ $G(\cancel{x})\,(u_z - c_z)\, f_1^{(0)}(u) = \lambda m \left(\frac{N}{V}\right) I_1[\Phi]$

$$= \left(\frac{N}{V}\right)\lambda m \int_{\mathbb{R}^3} d^3u_1 \int_{\mathbb{R}^3} d^2e' \, |u_1 - u|\, \sigma(x, \sqrt{m\kappa T}\,|u-u_1|)\, f_1^{(0)}(u)\, f_1^{(0)}(u_1)$$

$$\cdot\Big(\cancel{\Phi_c^{(0)}(x,u_1,\tau)} + \Phi_c^{(1)}(x,u_1,\tau) - \cancel{\Phi_c^{(0)}(x,u_1^f,\tau)} - \Phi_c^{(1)}(x,u_1^f,\tau)$$

$$+ \Phi_c^{(1)}(x,u,\tau) + \cancel{\Phi_c^{(0)}(x,u_1,\tau)} - \Phi_c^{(1)}(x,u^f,\tau) - \cancel{\Phi_c^{(0)}(x,u^f,\tau)} \Big)$$

ordre ε^0 $= \Phi_c^{(0)}(x,u,\tau) + \Phi_c^{(0)}(x,u_1,\tau)$

$$\boxed{G(x)\cdot(u_z - c_z) = \left(\frac{N}{V}\right)\lambda m \int_{\mathbb{R}^3} d^3u_1 \int_{\mathbb{R}^3} d^2e'\, |u_1-u|\, \sigma(x, \sqrt{m\kappa T}\,|u-u_1|)\, f_1^{(0)}(u_1)\cdot\Big(\Phi_c^{(1)}(x,u_1,\tau) + \Phi_c^{(1)}(x,u,\tau) - \Phi_c^{(1)}(x,u_1^f,\tau) - \Phi_c^{(1)}(x,u^f,\tau)\Big)}$$

juste.

→ Equation intégrale pour $\Phi_c^{(1)}$

→ c'est le seul ordre de grandeur où apparaît la force $G(u)$!

→ on peut essayer de résoudre avec instructs du type $\Phi_c^{(1)}(x,u,\tau) = G(x)\cdot A(\ldots)$ ... ?

Comme le membre de gauche est indép. de τ, ~~alors les variables u et τ sont découplées~~ alors les variables u et τ sont découplées, et donc $\Phi = G(x)A(\ldots) + B(\tau)$, mais comme le membre de gauche est indép. de τ, alors $B = cte|_\tau$. ⟹

~~$\Phi_c^{(1)}(x,u,\tau) = G(x)A + B(\tau)$~~

$(u_z - c_z) = \left(\frac{N}{V}\right)\lambda m \int_{\mathbb{R}^3} d^3u_1 \int_{\mathbb{R}^3} d^2e'\, |u_1-u|\,\sigma(x,\sqrt{m\kappa T}\,|u-u_1|)\, f_1^{(0)}(u_1)\,(A^{(1)}_1 + A^{(1)} - A^{(1)}_1 - A^{(1)})$

$\boxed{O(\varepsilon^k), k\geq 2}$ $0 = \left(\frac{N}{V}\right)\lambda m \quad I_k[\Phi]$

$$\Rightarrow \boxed{\Big(\Phi_c^{(k)}(x,u,\tau) + \Phi_c^{(k)}(x,u_1,\tau) - \Phi_c^{(k)}(x,u_1^f,\tau) - \Phi_c^{(k)}(x,u^f,\tau)\Big) = 0}$$

→ même règle qu'à l'ordre zéro. Toutes les échelles de temps sont découplées.

→ règles de somme entre collisions aux différents ordres de temps... et après ?...

• Début de (III) ; $f_1^{(0)}(u) = (2\pi)^{-3/2} e^{-\frac{1}{2}(\bar{u}-\bar{c})^2}$

$$\frac{D}{D\tau} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\cdot\nabla_x + \varepsilon\, G(x)\frac{\partial}{\partial u_z}$$

avec : $x = x(t)$; $u = u(x,t)$, or aussi par le changement de variables $u = u(n,t) = u(\rho,t)$

$$\left.\begin{aligned} u_z &= \frac{1}{\sqrt{m\kappa T}}\, p_z \\ \rho &= m\cdot n \Rightarrow m = \frac{\rho}{n} \end{aligned}\right\}\quad u_z = \frac{1}{\sqrt{\kappa T \frac{\rho}{n}}}\, p_z = \frac{n}{\sqrt{\kappa T\rho}}\, p_z = \frac{n}{\sqrt{\kappa T}}\,\rho^{-1/2}\, p_z$$

→ change de variable de dépendance : état décrit par les variables d'équilibre

$u(x,t) \to u(\rho,t)$; $\rho = \rho(t)$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial f_1^{(0)}(u)}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial f_1^{(0)}(u)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{rel. conserv.}} + \underbrace{\frac{\partial f_1^{(0)}(u)}{\partial \rho}}\cdot\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{= -\nabla_x\cdot(\rho u)}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\rho}(\bar{u}-\bar{c})^2 f_1^{(0)}(u)$$

$$= -(\bar{u}-c)\cdot\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\rho} - \frac{\partial\bar{c}}{\partial\rho}\right)$$

$$\frac{\partial \bar c}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\sqrt{\kappa T}}\cdot\frac{1}{n}\cdot\rho^{+1/2}\, u_z = \frac{1}{2}\rho\, c_z$$

$$\frac{\partial \bar u}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial\rho}\,\rho^{-1/2}\,\frac{n}{\sqrt{\kappa T}}\,p_z = -\frac{1}{2}\frac{1}{\rho}\,u_z$$

$$= -(\bar{u}-c)\left(\cancel{u}\ \tfrac{1}{2}\rho\, c_z - \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{\rho}u_z\right)$$

$$= \frac{1}{2}(u_z - c_z)\left(\frac{\bar{u}}{\rho} - \rho\cdot\bar{c}\right)$$

$$\frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial x} = \frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$$

• pour continuer il faut utiliser les lois de conservation adimensionalisées.

⚠ ici Kreuzer élimine la dépendance temporelle grâce aux lois de conservation, tandis que nous on doit appliquer la théorie des chgt. d'échelles sur le temps.

- suite du point (I), ordre $O(\varepsilon)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau_0}+\bar{u}\cdot\nabla_{\underline{x}}\right)\Phi_c^{(0)}(\underline{x},\underline{u};\tau_0,\tau_1,\dots) = J\Phi$$

- on sait de J que : (voir livre bleu)
  - opérateur auto-adjoint
  - opérateur linéaire
  - valeurs et vecteurs propres : $J\psi_i=\lambda_i\psi_i$
    - ↳ constantes du mouvement : 5 valeurs propres nulles : $1,\bar{u},u^2$: $\{\lambda_i\}_{i=1}^{5}=0$
    - ↳ toutes les autres v.p. sont négatives
  - J est un opérateur scalaire $\Rightarrow$ $\psi_{rem} = R_{re}(|\bar{u}|)\cdot Y_{em}(\hat{u})$
  - $\Rightarrow$ dans le cas de molécules de Maxwell les ψ sont connues
    - ↳ c'est le cas qui nous intéresse car alors

$$|F(r)| = \frac{\mathcal{K}}{r^5} \qquad \text{idem Kreuzer !}$$

car homogène spatialement : $\Phi_c \neq \Phi_c(X)$

$$\Phi_c(u;\tau) = \sum_i a_i e^{\lambda_i\tau}\psi_i(\bar{c})$$

φ_i : connus

Suite du cas (II) : suivant la démarche du Kreuzer, on a avant adimensionalisation

$$\cancel{\frac{\partial f_1^{(0)}(p)}{\partial t} = \frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial T} + \frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

$$\cancel{\Rightarrow \frac{\tilde{D} f_1^{(0)}}{\tilde{D} t} = f_1^{(0)}(r,p,t)\left(\left(\frac{(p-mv)^2}{2mk_BT}-\frac{5}{2}\right)\frac{p-mv}{m}\cdot\left(\frac{\nabla T}{T}\right) + \frac{1}{k_BT}\left(\frac{(p-mv)(p-mv)}{m}(\nabla v) - \frac{1}{3}\frac{(p-mv)^2}{2m}(\nabla v)\right)\right)}$$

$$\cancel{\Rightarrow f_1^{(0)}(r,p,t)\left(\left(\frac{(p-mv)^2}{2mk_BT}-\frac{5}{2}\right)\frac{p-mv}{m}\left(\frac{\nabla T}{T}\right) + \frac{1}{mk_BT}\left((p-mv)(p-mv) - \frac{1}{3}(p-mv)^2\mathbb{1}\right):\Lambda\right) = -\left(\frac{\rho}{V}\right) I[\Phi_c^{(1)}]}$$

$$\cancel{\Lambda_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial r_\beta}-\frac{\partial v_\beta}{\partial r_\alpha}\right) \; ; \; A:B=\sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}}$$

- ~~on introduit maintenant seulement les grandeurs adimensionnelles~~

- Kreuzer : p. 199 $\int d^3p\; I[\Phi^{(1)}]=0$: à voir :

$$\int d^3p\; I[\Phi^{(1)}] = \int d^3p_1\, d^3p\, d^2e'\; \overbrace{\sigma(\chi,|p_1-p|)\;|p_1-p|\; f_1^{(0)}(r,p,t)\; f_1^{(0)}(r,p_1,t)}^{\text{invariant } p_1\leftrightarrow p}$$

$$\left(\underbrace{\Phi(p)}_{\to -\Phi(p_1)} + \Phi(p_1) - \Phi(p^f) - \Phi(p_1^f)\right) \longrightarrow 0$$

- transformation $p\leftrightarrow p_1$ $\Rightarrow$ $e'\to -e'$, $d^2e'\to -d^2e'$ $\Rightarrow$ $p^f\to p_1^f$; $p_1^f\to p^f$

NON ! par le théorème de l'invariant de collision...

- idée : – écrire les lois de conservation avec la théorie des échelles
  – écrire le membre de gauche avec la th. échelles.
- essayons de redériver les équations du Kreuzer :

$$① \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} = -\nabla\cdot(\rho v) = -\; v\cdot(\nabla\rho) - \rho(\nabla\cdot v)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} = v\underbrace{\frac{\partial\rho}{\partial t}}_{= -v(\nabla\rho)-\rho(\nabla v)} + \rho\frac{\partial v}{\partial t} = -\nabla p - \rho v(\nabla\cdot v) + \rho F$$

$$② \Rightarrow \; -v^2(\nabla\rho) - \rho v(\nabla v) + \rho\frac{\partial v}{\partial t} = -\nabla p - \rho v(\nabla v) + \rho F$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{3}{2}\frac{\rho}{m}kT\right) = p(\nabla v) - \nabla\left(\frac{3}{2}\frac{\rho}{m}kTv\right)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}\frac{kT}{m}\frac{\partial\rho}{\partial t} = p(\nabla v) - \frac{3}{2}\frac{k}{m}\left((\nabla\rho)\cdot(Tv) + \rho(\nabla T)v + \rho T(\nabla v)\right)$$

$$\frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}(2m\pi k_BT)^{-3/2}\exp\left(-\frac{(p-mv)^2}{2mkT}\right) = +\frac{2(p-mv)}{2mkT}(+m)\frac{\nabla v}{|v|}f_1^{(0)}$$

$$= \frac{p-mv}{kT}\frac{\nabla v}{|v|}f_1^{(0)}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\nabla(\rho v)$$

• calcul :

$$\frac{\delta f_1^{(0)}}{\delta t} = \frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial t} + \frac{p}{m}\cdot\nabla_r f_1^{(0)} + mF(r)\cdot\nabla_p f_1^{(0)}$$

$$= \frac{p-mv}{KT} f_1^{(0)}\cdot\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial \rho}\cdot\left(-\nabla(\rho v)\right) + \frac{p}{m}\nabla_r f_1^{(0)} + mF(r)\underbrace{\nabla_p f_1^{(0)}}_{= -\frac{2(p-mv)}{2mk_BT}\frac{\nabla p}{|p|}f_1^{(0)}}$$

$$= \frac{(p-mv)}{KT}\frac{\nabla v}{|v|} f_1^{(0)}\left(\frac{1}{\rho}\left(-v\frac{\partial \rho}{\partial t} - \nabla p - \rho v(\nabla v) + \rho F\right)\right)$$

$$-\nabla(\rho v)\frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial \rho} + \frac{p}{m}\underbrace{\nabla_r f_1^{(0)}}_{\text{dépend de } r \text{ uniquement par } v} - \frac{(p-mv)}{\cancel{m}k_BT}\frac{\nabla p}{|p|} f_1^{(0)}\cancel{m}F(r)$$

$$\Rightarrow = \nabla_v f_1^{(0)}\cdot\nabla_r v$$

$$= \frac{(p-mv)}{KT}\frac{\nabla v}{|v|} f_1^{(0)}\frac{1}{\rho}\left(+v\left(+\nabla(\rho v)\right) - \nabla p - \rho v(\nabla v) + \rho F\right) - \nabla(\rho v)\frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial \rho}$$

$$+\frac{p}{m}(+1)\frac{\cancel{2}(p-mv)}{\cancel{2}mKT}(+m)\cdot\nabla v^{f_1^{(0)}} - \frac{(p-mv)}{K_BT}\frac{\nabla p}{|p|} f_1^{(0)}F(r)$$

$$= \frac{(\vec{p}-m\vec{v})}{KT} f_1^{(0)}\frac{1}{\rho}\left(\vec{v}\,\nabla(\rho\vec{v}) - \nabla p - \rho v(\nabla v) + \rho\vec{F}\right) - \nabla(\rho\vec{v})\frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial \rho}$$

$$+\frac{p}{m}\frac{(\vec{p}-m\vec{v})}{KT}\nabla\vec{v}^{f_1^{(0)}} - \frac{(\vec{p}-m\vec{v})}{K_BT} f_1^{(0)}\vec{F}(\vec{r})$$

$$= f_1^{(0)}\cdot\left(\frac{(p-mv)}{KT}\frac{1}{\rho}\left(v\underbrace{\nabla(\rho v)}_{=(\nabla\rho)\cdot v + \cancel{\rho\nabla v}} - \nabla p - \cancel{\rho v(\nabla v)} + \rho F\right) + \frac{p}{m}\frac{(p-mv)}{KT}\nabla v - \frac{(p-mv)}{KT}F(r)\right)$$

$$-\nabla(\rho v)\frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial \rho}$$

$$= f_1^{(0)}\frac{p-mv}{KT}\left(\frac{1}{\rho}\left(v^2\nabla\rho - \underbrace{\nabla p}_{= kT\nabla\rho} + \rho F\right) + \frac{\overset{= kT\rho}{p}}{m}\nabla v - F(r)\right) - \nabla(\rho v)\frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial \rho}$$

$$= f_1^{(0)}\frac{p-mv}{KT}\left(\frac{1}{\rho}\left(v^2\nabla\rho - kT\nabla\rho + \rho F\right) + \frac{KT}{m}\rho\nabla v - F(r)\right) - \nabla(\rho v)\frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial \rho}$$

Suite : 3 points

- calcul de la section efficace (unités ? δ) : BLOQUÉ !
- résolution de la super-équation-intégrale : BLOQUÉ !
- calcul des équations multi-échelle avec éq. local. : BLOQUÉ !
  essayer $\rho \neq \rho(x,t)$ uniquement $v = v(t)$!
- unités éq. Boltzmann :

• Ernst, 1981 Rev. Mod. Phys.
  ↳ gaz Maxwell !!

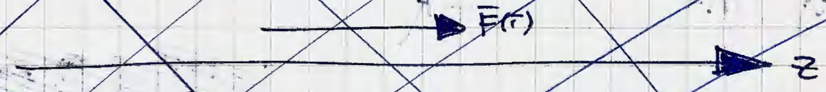
• calcul de la section efficace classique d'un gaz de Maxwell : $F(r)$ a les dimensions d'une accélération, alors la force est : $\frac{\vec{F}(\vec{r})}{m}$ qui est ressentie par la particule. ~~Ainsi, le transfert d'impulsion à la particule est :~~

$$\cancel{\Delta p = \int_{\mathbb{R}} dt}$$

~~Le problème est symétrique car $F(r)$~~

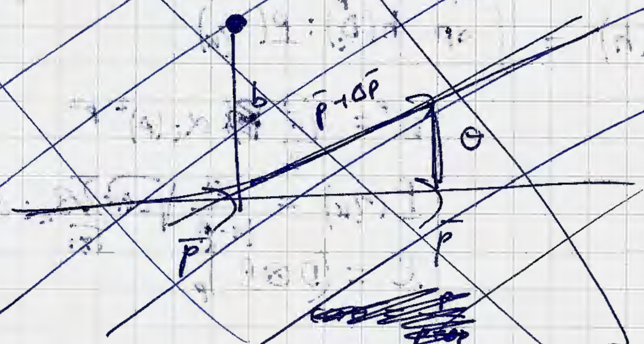
• comme $\vec{F}(\vec{r}) = (0, 0, F(\vec{r}))$, alors : le transfert d'impulsion est :

$$\Delta p = \int_{\mathbb{R}} dt \cdot \frac{\vec{F}(r(t))}{m} \, dt$$



• l'énergie :

$$\delta E = \frac{\Delta p^2}{2m}$$



• calcul de la section efficace : référence : Gruber !!!

La section efficace du problème à symétrie cylindrique est donnée par

$$\sigma(\chi, |k|) = \frac{b}{\sin\chi}\left|\frac{\partial b}{\partial \chi}\right|$$

, b : paramètre d'impact
χ : angle de diffusion

il faut encore calculer $b = b(\chi)$, par cela, je vais me farcir tous les calculs depuis le début :

$$m_1 \ddot{r}_1 = F_1 \quad (1) \qquad F(r) = \frac{\varkappa}{r^5} \qquad = \varkappa \frac{\vec{r}}{r^6}$$

$$m_1 \ddot{r}_2 = F_2 = -F_1 \quad (2)$$

dans le centre de masse : $R = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$, alors $(1) + (2) \Rightarrow$

$$m(\ddot{r}_1 + \ddot{r}_2) = 0 \Rightarrow \ddot{R} = \vec{0} \Rightarrow R(t) = V_0 t + R_0 \quad : V_0 : \text{vitesse init. cst.}$$

et $(1) - (2) \Rightarrow$

$$\underbrace{m(\ddot{r}_1 - \ddot{r}_2)}_{:= m \cdot \ddot{r}} = F_1 - F_2 = 2F_1 = \varkappa\left(\frac{r_1 - r_2}{\|r_1 - r_2\|^6} - \frac{r_2 - r_1}{\|r_1 - r_2\|^6}\right)$$

$$= 2\varkappa \frac{r_1 - r_2}{\|r_1 - r_2\|^6}$$

$$= 2\varkappa \cdot \frac{r}{r^6}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{m}{2} \cdot \ddot{r} = \varkappa \frac{\vec{r}}{r^6}} \quad \boxed{R(t) = v_0 t + R_0}$$

• en coordonnées cylindriques : (polaires ici : mvt. plan car force centrale) ~~$\ddot{r} = B\cos(\theta + \alpha) = \frac{2}{m}\varkappa\frac{r}{r^6}$~~

$$[s^{-1}]\left[\frac{s^3}{kg^3 m^3}\right] = \frac{s^2}{kg^3 m^3}$$

$$\frac{\cancel{m}}{\cancel{m^2}}\, kg \cdot \frac{\cancel{m}}{s}\, \cdot \left(\frac{s^3}{kg^3 \cdot m^3}\right)^2 \left(kg\, \frac{m}{s}\right)^3$$

$$\frac{kg}{\cancel{s}} \cdot \frac{s^6}{kg^6 \cdot m^6} \cdot \frac{kg^3 \cdot m^3}{\cancel{s^3}}$$

$$\frac{s^2}{kg^2\, m^3} = kg \cdot \frac{s^2}{kg^3\, m^3}$$

$$\xi(h) = \int_0^{x(p)} dp\; h(D_i^p) : P(\eta_k)$$

$$D_i^p = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, \alpha_i(p)^2\, p^2$$

$$P(\eta_k) = \frac{k!}{(k-1)!}\sqrt{2\pi}\sum_{i\geq 1}\beta_{ki}\,\alpha_{ik}$$

$$\chi = (D \otimes P)_p$$

$\Rightarrow$ l'équation est :

$$\sum_{k\geq 0} \varepsilon^k (u-c)\frac{\partial c}{\partial \tau_k} + \varepsilon G(x)\,(u_z - c_z) = \sum_{n\geq 0} \varepsilon^k\, \tilde{I}[\Phi_c^{(k)}]$$

$$= \frac{\nabla \rho}{\rho} + \varepsilon G(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k\sum_{i=1}^{3}(u_i-c_i)\frac{\nabla\rho}{\rho} + \sum_{k\geq 0}\varepsilon^{k+1}(u-c)\,G(x)}_{\text{nouveaux termes}} + \varepsilon G(x)\,(u_z-c_z) = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k\, \tilde{I}[\Phi_c^{(k)}]}$$

$$O(\varepsilon^0): \boxed{\sum_{i=1}^{3}(u_i-c_i)\frac{\nabla\rho}{\rho} = \tilde{I}[\Phi_c^{(0)}]}$$

$$O(\varepsilon): (u-c)\frac{\nabla\rho}{\rho} + \underbrace{(u-c)\,G(x) + G(x)\,(u_z-c_z)} = \tilde{I}[\Phi_c^{(1)}]$$

$$G(x)\left(\sum_{i=1}^{3}(u_i-c_i)\cdot f(i)\right), \quad f(i)=\begin{cases}1, & i=1,2\\ 2, & i=3\end{cases} = (1+\delta_{i,3})$$

$$= G(x)\sum_{i=1}^{3}(u_i-c_i)(1+\delta_{i,3})$$

$$\boxed{\frac{\nabla\rho}{\rho}\sum_{i=1}^{3}(u_i-c_i) + G(x)\sum_{i=1}^{3}(u_i-c_i)(1+\delta_{i,3}) = \tilde{I}[\Phi_c^{(1)}]}$$

$$O(\varepsilon^k): \sum_{i=1}^{3}(u_i-c_i)\frac{\nabla\rho}{\rho} + \sum_{i=1}^{3}(u_i-c_i)\,G(x) = \tilde{I}[\Phi_c^{(k)}]$$

$$\boxed{\left(\frac{\nabla\rho}{\rho}+G(x)\right)\sum_{i=1}^{3}(u_i-c_i) = \hat{I}[\Phi_c^{(k)}]}$$

Mais je pense que ces calculs sont faux car je n'ai pas le droit de ~~[illegible]~~ simplifier les densité de masse.

$$f_1^{(0)}(u) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{1}{2}(u-c)^2}$$

$c = c(x,t)$
$u = u(\ldots)$

NON ! $\rho = \rho(c)$ $\Rightarrow$ $n = n(t)$ $\Rightarrow$ on n'a pas le droit d'adimensionaliser avant le calcul !!!

↓ mais ρ n'apparaît nulle part dans f !!! ⇓ juste !

· Équation générale :

$$\left(\sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \frac{\partial}{\partial \tau_k} + u\cdot\nabla_x + \varepsilon G(x) \frac{\partial}{\partial u_z} \right) f_1^{(0)}(u) = -\sum_{k\geq 0} \varepsilon^k I_a[\Phi_c^{(k)}]$$

· or toujours $f_1^{(0)}(u)$ indép. de τ (dérivée partielle !), ainsi :

$$(LHS) = \underbrace{u\cdot\nabla_x f_1^{(0)}(u)}\ + \varepsilon G(x)(u_z - c_z) f_1^{(0)}(u) = -\sum_{k\geq 0} \varepsilon^k I[\Phi_c^{(k)}]$$

$$= \sum_{i=1}^{3} u_i \frac{d}{dx_i} f_1^{(0)}(u)$$

$$= \sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial c_i} \frac{\partial c_i}{\partial x_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} u_i \frac{dc_i}{dx_i} \Big(\underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(-\frac{1}{2}\right) \underbrace{\frac{\partial}{\partial c_i}(u_i - c_i)^2}_{=2(u_i-c_i)\cdot(-1)}}_{=-1} e^{-\frac{1}{2}(u-c)^2} \Big)$$

$= (u_i - c_i)$

$$= \sum_{i=1}^{3} u_i (u_i - c_i) \frac{dc_i}{dx_i} f_1^{(0)}(u)$$

$$= \cancel{(u\cdot(u-c))\cdot\nabla_x c}\ f_1^{(0)}(u)$$

? NON !

: pb. sym. dans le plan (e_1, e_2) $\Rightarrow$ $u_1(u_1-c_1)\frac{dc_1}{dx_1} = u_2(u_2-c_2)\frac{dc_2}{dx_2}$

$\Rightarrow 2u_1(u_1-c_1)\frac{dc_1}{dx_1} + u_3(u_3-c_3)\frac{dc_3}{dx_3}$

$\Rightarrow -u_1(u_1-c_1)\frac{dc_3}{dx_3} + u_3(u_3-c_3)\frac{dc_3}{dx_3}$

$\Rightarrow \frac{dc_3}{dx_3}\left(u_3(u_3-c_3) - u_1(u_1-c_1)\right)$

$$\Rightarrow (u\cdot(u-c))\cdot\nabla_x c - \varepsilon G(x)(u_z - c_z) = -\sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \tilde{I}[\Phi_c^{(k)}]$$

NON.

~~pb. homogène dans le plan e_2, e_1 (Force selon e_3 uniq.) $\Rightarrow$ champ de vitesse constant selon e_1, e_2 $\Rightarrow \frac{dc_i}{dx_i} = 0\ \forall i = 1,2$~~

· en exploitant les relations de conservation :

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{=0} = -\nabla_r(\rho\cdot v) \Rightarrow \nabla v = 0$$

$= \rho\nabla v + v\nabla\rho = 0 \Rightarrow \rho\nabla v + v\frac{\nabla\rho}{\rho} = 0$

: $\frac{dv_1}{dx_1} + \frac{dv_2}{dx_2} + \frac{dv_3}{dx_3} = 0 \Rightarrow \frac{dv_3}{dx_3} = -2\frac{dv_1}{dx_1}$

$= 2\frac{dv_1}{dx_1}$

$\partial v = \rho\nabla v + v\frac{\nabla\rho}{\rho}$

avec : $v = \sqrt{\frac{kT}{m}}\, c$, et $x = \frac{1}{\lambda} r$, $r = \lambda x$

$\nabla_x c = 0$

$\nabla_r = \frac{1}{\lambda}\nabla_x$

$v = \sqrt{\frac{kT}{m}}\, c$

$\frac{\partial_t \rho}{\rho}$

$\Rightarrow \frac{1}{\lambda}\nabla_x \sqrt{\frac{kT}{m}} c + \sqrt{\frac{kT}{m}}\, c\frac{\nabla\rho}{\rho}\frac{1}{\lambda} = 0$

$\Rightarrow \underbrace{\nabla_x c}_{=\frac{\partial c_z}{\partial x_z}} + c\frac{\nabla_x\rho}{\rho} = 0 \Rightarrow \frac{\partial c_z}{\partial x_z} = -c\frac{\nabla\rho}{\rho}$

d'où :

$$\varepsilon G(x)(u_z - c_z) = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k \tilde{I}[\Phi_c^{(k)}]$$

$\partial v = -\rho\nabla v \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial \rho}{\rho}$

ce qui est la même équation que dans le cas où tout est constant !!!
⟹ faux : on doit faire les calculs avant l'adimensionalisation !

· si par exemple on avait une dérivée "totale" $\boxed{\text{pour } \frac{\partial}{\partial \tau_k}}$, alors :

$$\frac{\partial}{\partial \tau_k} f_1^{(0)}(u) = \cancel{\frac{\partial f}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial \tau}} \quad \nabla_c f\cdot\frac{\partial c}{\partial \tau_k}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} e_i \frac{\partial f}{\partial c_i} = -(u_i - c_i)(-1) f$$

$$\Rightarrow \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k (u-c)\frac{\partial c}{\partial \tau_k} + \varepsilon G(x)(u_z - c_z) = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k \tilde{I}[\Phi_c^{(k)}]$$

$\Rightarrow$

$-u_z(u_z - c_z)\, c\frac{\nabla_x\rho}{\rho} - \varepsilon G(x)(u_z - c_z) = -\sum$

$\frac{\partial_t \rho}{\rho}$

$= (u_z - c_z) f\ (-(u_z - c_z))(\varepsilon G(x) + u_z H(\rho))$

· or : (lois de conservation valables à toutes les échelles de temps)

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\cdot v)}_{=\rho\frac{\partial v}{\partial t}} = -\nabla p - \rho v(\underbrace{\nabla\cdot v}_{=0}) + \rho F \Rightarrow \rho\frac{\partial v}{\partial t} = -\nabla p + \rho\cdot F$$

NON !

$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + F$

avec : $p = nkT$, $= \frac{1}{m}(mn) = \frac{1}{m}\rho$

$\Rightarrow \nabla p = \frac{kT}{m}\nabla\rho$

$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{kT}{m}\nabla\rho + F$

$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{kT}{m}\frac{\nabla\rho}{\rho} + F$, $v = \sqrt{\frac{kT}{m}}\, c$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{kT}{m}}\frac{\partial c}{\partial \tau}\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{kT}{m}} = \frac{kT}{m}\frac{\nabla\rho}{\rho} + F$, $t = \lambda\sqrt{\frac{m}{kT}}\,\tau$

$\nabla = \nabla_r \sim \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{\lambda}\nabla_x$, $r = \lambda x$

$\Rightarrow \frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{m\lambda}{kT}\left(\frac{\nabla\rho}{\rho}\cdot\frac{kT}{m} + F(x)\right)$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{m\lambda|F|}{kT}\frac{kT}{m|F|}\frac{\nabla\rho}{\rho} + \frac{m\lambda F}{kT}\cdot G(x)$$

$$= \varepsilon\left(\frac{kT}{mF}\frac{\nabla\rho}{\rho} + G(x)\right)$$

$$= \varepsilon\left(\frac{kT}{F\lambda m}\frac{\nabla_x\rho}{\rho} + G(x)\right)$$

$$= \frac{\nabla\rho}{\rho} + \varepsilon G(x)$$

$\sum_{k\geq 0}\ \ldots\ \varepsilon^{k+1}(u-c)\, G(x) = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k\ldots + \varepsilon\, G(x)(u_z - c_z)$

$$f(r,v,t) = \rho(r,t)\left(\frac{m}{2\pi k T(r,t)}\right)^{3/2} e^{-\frac{1}{2} m \frac{(v-v_0)^2}{kT}}$$

$$\int d^3r \int d^3v \; f = N$$

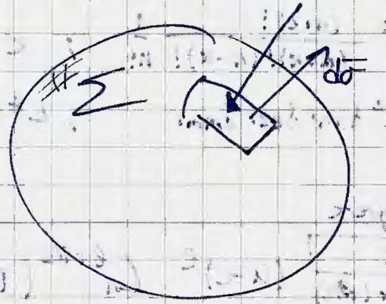
$$\int d^3v\, f = \rho \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{3/2} = \rho$$

$$\int d^3r \int d^3v f = \int d^3r \; \rho(r,t) = N$$

$$\left(\frac{N}{V}\right) = n(r,t)$$

$$m \cdot n(r,t) = \rho(r,t)$$

$$\cancel{\frac{d}{dt}Q \;\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\int_\Sigma d\bar\sigma\, J(x,t) = -\int_V d^3x \ldots}$$



$\partial_t \rho > 0$ si $d\bar\sigma \cdot J < 0$

$$\frac{d}{dt}Q(t) = -\int_\Sigma d\bar\sigma \cdot \bar j(x,t)$$

$$= -\int_V d^3x \; \operatorname{div} j(\bar x, t) \qquad ; \; Q = \int_V d^3x\, \rho(x,t)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\int_V d^3x\; \rho(x,t) = -\int_V d^3x \; \operatorname{div} j(x,t)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\rho(x,t) = -\operatorname{div} j(x,t)$$

$\boxed{\triangle \text{ si } V = V(t)}$

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3x\, \rho(x,t) = \int_{V(t)} d^3x\, \frac{\partial\rho}{\partial t}(x,t) + \Big\{ \cancel{\frac{dv}{dt}\rho} + \int_{\Sigma(t)} d\bar\sigma\; \rho(x,t) \Big\}$$

$$\int_{V(t)} = \int_{V_0} + \int_{\substack{V(t)-V(0)\\ = \delta V(t)}}$$

$\longrightarrow 0$

A faire: examiner le cas $\rho = \rho(x,t)$

$$\cancel{\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{\nabla \rho}{\rho} + \varepsilon G(x) \ldots = \frac{1}{\rho}\ldots \frac{\partial\rho(x_z,t)}{\ldots} + \varepsilon G(x)}$$

loi n° 1 :

$$\frac{\partial c_z}{\partial x_z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial\tau} + \underbrace{c \cdot \frac{1}{\rho}\nabla_x \rho(x,t)}_{= c_z \frac{\partial\rho}{\partial x_z}\cdot\frac{1}{\rho}}$$

$\underline{c} = (\cancel{c_x(z), c_y(z), c_z(z)}$
$c_x(x_z), c_y(x_z), c_z(x_z))$

$\rho = \rho(x_z)$

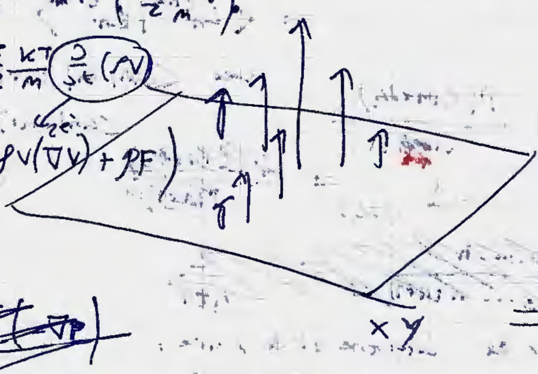
$\nabla_x \rho = \left(0, 0, \frac{\partial\rho}{\partial x_z}\right)$

$$kT \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{3}{2}\frac{\rho}{m}\right) = p \cdot \nabla v - kT\left(\frac{3}{2}\frac{\rho}{m} v\right)$$

$$\frac{3}{2}\frac{kT}{m}\frac{\partial}{\partial t}\rho = p\cdot\nabla v - \frac{3}{2}\frac{kT}{m}\frac{\partial}{\partial t}(\rho v)$$

$$\frac{3}{2}\frac{kT}{m}\frac{\partial\rho}{\partial t} = p\cdot\nabla v - \frac{3}{2}\frac{kT}{m}\left(-\nabla p - \rho v(\nabla v) + \rho F\right)$$

$= -\nabla(\rho v)$



$F = F(x,y,z)$

$= (0, 0, F)$

$\Longrightarrow$ pas homogène selon x, y !!

$$\cancel{-\frac{3}{2}\frac{kT}{m}\nabla(\rho v) = p\cdot\nabla v - \frac{3}{2}\frac{kT}{m}(-\nabla p)}$$

$$\frac{3}{2}\frac{kT}{m}\left(-\nabla(\rho v) - \underbrace{\nabla p}_{=\frac{kT}{m}\nabla\rho} - \rho v(\nabla v) + \rho F\right) = \underbrace{p}_{=\frac{kT}{m}\rho}\nabla v \qquad ; \; p = \frac{1}{m}\rho k T$$

· coefficient de viscosité : Kreuzer

$$P = p\mathbb{1} - 2\eta\Lambda$$

$$P = p\mathbb{1} + \left(\frac{N}{V}\right)\int \frac{(p-mv)(p-mv)}{m} f_1^{(0)}(r,p,t)\,\Phi^{(1)}(r,p,t)\, d^3p$$

---

① • Avec les polynômes de Sonine :

$$g_{nem}(\vec{u}-\vec{c}) = (u-c)^e\, S_{e+1/2}^{(n)}\left((u-c)^2\right) Y_e^m(\widehat{u-c}) \cdot C$$

$$S_e^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-x)^k \frac{(n+e)!}{(e+k)!\,(n-k)!}\frac{1}{k!} \quad ; \quad \langle S_e^{(n)} | S_e^{(n')}\rangle = \frac{\Gamma(e+n+1)}{n!}\delta_{nn'} \quad ; \quad L^2(\mathbb{R}, e^{-x} x^e)$$

$$\langle g_{nem} | g_{n'e'm'}\rangle = C^2 \delta_{nn'}\delta_{ee'}\delta_{mm'} \quad , \quad L^2(\mathbb{R}^3, e^{-x^2} d^3x)$$

② • Avec les polynômes de Laguerre

$$\boxed{g_{nem}(\vec{u}-\vec{c}) = \sqrt{\frac{2n!}{\Gamma(n+e+3/2)}}\,(u-c)^e\, L_n^{e+1/2}\left((u-c)^2\right) Y_e^m(\theta,\varphi)}$$

$$\langle g_{nem} | g_{n'e'm'}\rangle = \delta_{nn'}\delta_{ee'}\delta_{mm'} \quad , \quad L^2(\mathbb{R}^3, d^3x\, e^{-x^2})$$

Vérification des normalisations :

①

$$\langle g_{nem} | g_{n'e'm'}\rangle = C^2 \int d^3x\, x^{e+e'} S_{e+1/2}^{(n)}(x^2) S_{e'+1/2}^{(n')}(x^2) Y_e^m(\hat{x}) Y_{e'}^{m'}(\hat{x}) \cdot e^{-x^2}$$

$$= C^2 \int_0^\infty dx\, x^2 x^{e+e'} S_{e+1/2}^{(n)}(x^2) S_{e'+1/2}^{(n')}(x^2)\, e^{-x^2} \underbrace{\int d\Omega\, Y_e^m Y_{e'}^{m'}}$$

$y = x^2$, $dy = 2x\,dx$

$$= C^2 \int_0^\infty \frac{1}{2x} dy\, x^2 \underbrace{(x^2)^e}_{=y} S_{e+1/2}^{(n)}(y) S_{e+1/2}^{(n')}(y)\, e^{-y} = \delta_{ee'}\delta_{mm'}$$

$$= \frac{C^2}{2}\int_0^\infty dy\, y^{e+1/2} S_{e+1/2}^{(n)}(y) S_{e+1/2}^{(n')}(y)\, e^{-y}$$

$$= \frac{C^2}{2}\underbrace{\int_0^\infty dz\, z^{e+1/2} S_{e+1/2}^{(n)}(z) S_{e+1/2}^{(n')}(z)\, e^{-z}}_{= \langle S_e^{(n)} | S_e^{(n')}\rangle = \frac{\Gamma(e+n+1)}{n!}\delta_{nn'}}$$

$$= \frac{C^2}{2}\frac{\Gamma(e+n+1)}{n!}$$

$$= 1 \Rightarrow C^2 = \frac{2n!}{\Gamma(e+n+1)} \Longrightarrow C = \sqrt{\frac{2n!}{\Gamma(e+n+1)}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{g_{nem}(\vec{u}-\vec{c}) = \sqrt{\frac{2n!}{\Gamma(e+n+1)}}\,(u-c)^e\, S_{e+1/2}^{(n)}\left((u-c)^2\right) Y_{e}^{m}(\widehat{u-c})}$$

②

$$\langle g_{nem} | g_{n'e'm'}\rangle = \frac{2n!}{\Gamma(n+e+3/2)}\int d^3x\, x^{e+e'} L_n^{e+1/2}(x^2) L_{n'}^{e'+1/2}(x^2)\, Y_e^m Y_{e'}^{m'}\, e^{-x^2}$$

$$= \frac{2n!}{\Gamma(n+e+3/2)}\int_0^\infty dx\, x^2 x^{e+e'} L_n^{e+1/2}(x^2) L_{n'}^{e'+1/2}(x^2)\, e^{-x^2} \underbrace{\int d\Omega\, Y_e^m Y_{e'}^{m'}}_{=\delta_{ee'}\delta_{mm'}}$$

$y = x^2$, $dy = 2x\,dx$, $dx = \frac{dy}{2x}$

$$= \frac{2n!}{\Gamma(n+e+3/2)}\,\frac{1}{2}\underbrace{\int_0^\infty dy\, \underbrace{\frac{1}{x}x^2}_{=\sqrt{y}} y^e L_n^{e+1/2}(y) L_{n'}^{e+1/2}(y)\, e^{-y}}$$

$\alpha = e + 1/2$

$$= \langle L_n^{e+1/2} | L_{n'}^{e+1/2}\rangle = \delta_{nn'}\frac{1}{(-1)^{\alpha+n}}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(n+1)}$$

avec $\langle C(n) L_n | C(n') L_{n'}\rangle = \delta_{nn'}$ donc :

$\langle L_n | L_{n'}\rangle = \delta_{nn'}\frac{1}{C(n)^2}$, d'où :

$$= \frac{\cancel{2n!}}{\Gamma(n+e+3/2)}\,\frac{\Gamma(e+n+3/2)}{n!}$$

$$= 1 \cdot \cancel{\frac{n!}{(n+1)!}} = 1 \quad \alpha = \cancel{\frac{\Gamma(e+n+3/2)}{\Gamma(n+1)}}$$

$$\cancel{\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n(n+1)}} \quad \cancel{\frac{2}{n+1}}$$

⟹ Relation entre les polynômes de Laguerre et de Sonine :

$$L_n^{e+1/2} = \sqrt{\frac{\Gamma(n+e+3/2)}{\Gamma(n+e+1)}}\; S_{e+1/2}^{(n)}$$

• **Polynômes de Sonine** : (fonctions propres du gaz de Maxwell)

$$\mathrm{Sonine}_m^{(n)}(x) = (-1)^n\, \Gamma(n+m+1)\, S_m^{(n)}(x)$$

$$S_m^{(n)}(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-x)^p (n+m)^{n-p}}{p!\,(n-p)!}$$

– propriétés : $\langle S_m^{(p)} | S_m^{(q)} \rangle = \delta_{pq} \dfrac{\Gamma(m+p+1)}{p!}$, $L^2\left([0,\infty[, e^{-x} x^m\right)$

• **Théorie spectrale de l'opérateur de collision linéaire** : Cer cignani p. 180

$$Lg = \lambda g$$

: L est ici l'opérateur pour lequel on a simplifié $f(p)$

p. 104 Berne : fonctions propres

$V^\ell S_{\ell+1/2}^{(r)}\left(\frac{1}{2}\beta m V^2\right) Y_\ell^m(\hat{V})$

$V = v-u$; $\hat{V} = \frac{v-u}{|v-u|}$

– invariants de collision : on sait que :

$$\begin{cases} g = \psi_\alpha & : \text{inv. coll} \quad , \alpha = 0,1,2,3,4 \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

– autres valeurs propres :

$\lambda < 0$

– Maxwellian molecules : spectre discret, et :

$$\lambda_{n\ell} = \frac{2\pi\rho_0}{m} \int_0^{\pi/2} d\theta \left(P_\ell(\sin\theta) \cdot (\sin\theta)^{2n+1} \cdot \left(\beta(\theta) + \beta(\pi/2 - \theta)\right) - (\delta_{n0}\delta_{\ell 0} + 1)\,\beta(\theta) \right)$$

$$\beta(\theta) = \left(\frac{2K}{\mu}\right)^{\frac{2}{n-1}} b \frac{db}{d\theta}$$

? à vérifier !

P_ℓ : polynôme de Legendre n° ℓ.

$\mu = \dfrac{m}{2}$ (masse réduite)

$b\dfrac{db}{d\theta}$ donné par : x_0 sol. de $1 - x_0^2 - \left(\frac{x_0}{b}\right)^{n-1} = 0$, et $\theta = \int_0^{x_0} dx \left(1 - x^2 - \left(\frac{x}{b}\right)^{n-1}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \theta = \theta(b) \Rightarrow b = b(\theta)$

K défini par le potentiel $U = \dfrac{K}{\rho^{n-1}}$ t.q. $F = -(n-1)\dfrac{K}{\rho^{n}}$ ⚠ ici $n \neq$ indice de $\lambda_{n\ell}$

(voir p. 69 bas pour une discussion)

ρ_0 : distance de plus proche approche qui satisfait à l'équation (p. 70)

$$\frac{\mu}{2} V^2 \left(1 - \frac{r^2}{\rho_0^2}\right) - \frac{K}{\rho_0^4} + \frac{K}{\sigma^4} = 0$$

σ : cutoff de la sphère d'interaction

$\rho_0 \leq \sigma$; tous les calculs ci-dessus sont faits dans la limite $\sigma \to \infty$

– fonctions propres : dégénérescence $2\ell+1$ $\forall n$ (nouvel indice m)

$$g_{n\ell m} = \sqrt{\frac{2n!}{\Gamma(n+\ell+3/2)}} \left(\frac{\xi}{\sqrt{2RT_0}}\right)^\ell L_n^{\ell+1/2}\left(\frac{\xi^2}{2RT_0}\right) \cdot Y_\ell^m(\theta,\varphi)$$

$$(n, \ell = 0,1,2,\dots ,\ m \in [-\ell, \ell])$$

unités… $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT$ → essayer plutôt avec $v = \sqrt{\frac{kT_0}{m}}$

$L_n^{\ell+1/2}$: polynôme de Laguerre

$Y_\ell^m(\theta,\varphi)$: harmonique sphérique

θ, φ : angles des coordonnées sphériques dans l'espace des vitesses

ξ : vitesse

R : constante des gaz

T_0 : température locale

– relation d'orthonormalité :

$$\langle g_{n\ell m}(\xi) | g_{n'\ell' m'}(\xi) \rangle = \delta_{nn'}\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'} \quad , L^2\left(\mathbb{R}^3, d^3\xi\,(2RT_0)^{-3/2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2RT_0}\right)\right)$$

adapter → d^3p → d^3u … etc…

– invariants de collision :

$$\begin{cases} n = 0 , \ell = 0, m = 0 \\ n = 0 , \ell = 1 , m = -1, 0, 1 \\ n = 1 , \ell = 0 , m = 0 \end{cases}$$

– résultats : $\lim_{n\to\infty} \lambda_{n\ell} = -\infty \ \forall \ell$, $\lambda_{n\ell} \underset{n\to\infty}{\propto} -n^{1/4}$ Communications in the Applied Math

– tables λ valeurs : p. 183 ou : [20] Y. P. Pao, "Comm. Pure Appl. Math.", 27, 559 (1974)

- Histoire d'unités :

Exercice V :

(1) L'équation de Boltzmann ~~...~~ linéaire est :

$$\frac{\partial}{\partial t} f_1^{(1)}(r,v,t) = f_1^{(0)}(r,v,t)\; L[\Phi_c(r,v,t)]$$

$$f_1^{(0)}(r,v,t) = n(r,t)\cdot\frac{m^3}{(2\pi m k T)^{3/2}}\, e^{-\frac{\beta m v^2}{2}}$$

$$L[\Phi_c] = \int_{\mathbb{R}^3} d^3v \int_0^{4\pi} d\omega\; |v-v_1|\; \sigma(\omega, |v-v_1|)\; f_1^{(0)}(r,v_1,t)\left(\Phi\,\Phi_1 - \Phi_1'\Phi'\right)$$

(2)

- passage à p :

$$d^3(m^3 v) \qquad \frac{1}{m^3} f \qquad \equiv \text{idem.}$$

$$f(p) = \frac{1}{(2\pi m k T)^{3/2}}\, n(r,t)\, e^{-\frac{\beta p^2}{2m}}$$

(2) $$L = \int d^3p \int d\omega\; \frac{|p-p_1|}{m}\; \sigma\left(\omega, \frac{|p-p_1|}{m}\right) f \cdot \left(\Phi\,\Phi_1 - \Phi\,\Phi_1'\right)$$

Unités :

(1) $$\frac{1}{s} = (\ldots)^3 \;\frac{\ldots}{s}\; \frac{\ldots}{\ldots} \quad \ldots^3 \quad \frac{\ldots}{\ldots} \quad \frac{\ldots}{\ldots^3} \to (mkT)^{-3/2}$$

(2) $$\frac{1}{s} = \left(\ldots\right)^3 \left(\frac{\ldots}{s}\right) \frac{m^2}{\ldots} \quad \frac{\ldots}{m^3} \quad \frac{s^3}{\ldots}$$

1) unités : Borne (Dorfman) : oui : Kreuzer : faux : calculs ok, mais erreurs de présentation

2) densité ? Doit être dans la $f(r,p,t)$ → éq. ok !

En insérant ③ et ② dans ⊛ on a finalement:

$$\frac{\tilde{D}}{\tilde{D}\tau} \cancel{\frac{n_0}{(mk\tau_0)^{3/2}}} f_1^{(0)}(x,u,\tau) = \lambda \cdot \sqrt{\frac{m}{k\tau_0}} \cancel{\frac{n_0}{(mk\tau_0)^{3/2}}} f_1^{(0)}(x,u,\tau) \frac{(mk\tau_0)^2}{m} \int d^3u_1 d^2e' \, |u_1-u| \times$$

$$\times \, \sigma\left(\chi, \sqrt{\frac{k\tau_0}{m}}|u_1-u|\right) \frac{n_0}{(mk\tau_0)^{3/2}} f_1^{(0)}(x,u_1,\tau) \cdot (\ldots)$$

$$\Rightarrow \frac{\tilde{D}}{\tilde{D}\tau} f_1^{(0)}(x,u,\tau) = \underbrace{\lambda \cdot \sqrt{\frac{m}{k\tau_0}} \frac{(mk\tau_0)^2}{m} \frac{n_0}{(mk\tau_0)^{3/2}}}_{} \int d^3u_1 \int d^2e' \, |u_1-u| \, \sigma(\ldots) \, f_1^{(0)}(x,u_1,\tau) \, (\ldots) \quad f_1^{(0)}$$

$= (mk\tau_0)^{4/2-3/2=1/2}$

$$= \lambda \cdot \sqrt{\frac{m}{k\tau_0}} \frac{n_0}{m} \sqrt{mk\tau_0}$$

$$= \lambda \cdot \frac{n_0}{m} \sqrt{\frac{m}{\cancel{k\tau_0}} \cancel{mk\tau_0}}_{=m}$$

$$= \lambda \cdot n_0$$

$$= f_1^{(0)} \cdot \int d^3u_1 \int d^2e' \, |u_1-u| \, \sigma\left(\chi, \sqrt{\frac{k\tau_0}{m}}(u_1-u)\right) \lambda \cdot n_0 \quad f_1^{(0)}(x,u_1,\tau) \, (\ldots)$$

Conclusion:

$$\frac{\tilde{D}}{\tilde{D}\tau} f_1^{(0)}(x,u,\tau) = f_1^{(0)}(x,u,\tau) \cdot L[\Phi_c]$$

$$L[\Phi_c] = \int d^3u_1 \int d^2e' \, |u_1-u| \, \Sigma\left(\chi, \sqrt{\frac{k\tau_0}{m}}|u_1-u|\right) f_1^{(0)}(x,u_1,\tau) \cdot \Big(\Phi_c(x,u_1^f,\tau) + \Phi_c(x,u^f,\tau)$$
$$- \Phi_c(x,u_1,\tau) - \Phi_c(x,u,\tau)\Big)$$

$$\Sigma\left(\chi, \sqrt{\frac{k\tau_0}{m}}|u_1-u|\right) = \lambda \cdot n_0 \quad \sigma\left(\chi, \sqrt{\frac{k\tau_0}{m}}|u_1-u|\right)$$

$$f_1^{(0)}(x,u,\tau) = \frac{\tilde{n}(x,\tau)}{(2\pi \tilde{T}(x,\tau))^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(u-c)^2}{\tilde{T}(x,\tau)}\right)$$

$$\varepsilon = \frac{m \cdot \lambda \frac{F_0}{m}}{k\tau_0}$$

$$\tilde{F}(x) = \frac{F(x)}{F_0}$$

$$\tilde{T}(x,\tau) = \frac{T(x,\tau)}{T_0}$$

$$\tilde{n}(x,\tau) = \frac{n(x,\tau)}{n_0}$$

$$\frac{\tilde{D}}{\tilde{D}\tau} = \frac{\partial}{\partial\tau} + \bar{u}\cdot\nabla_x + \varepsilon \tilde{F}(x)\cdot\nabla_u$$

Nouvelle adimentionalisation de l'équation de Boltzmann, mais cas plus général.

① $\frac{\tilde{D}}{\tilde{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{p}{m}\cdot\nabla_r + F(r)\cdot\nabla_p$

② $L[\Phi_c] = \int_{\mathbb{R}^{3\times 2}} d^3p_1 d^2e' \frac{|p_1-p|}{m}\sigma\left(\chi, \frac{|p_1-p|}{m}\right) f_1^{(0)}(r,p,t)\left(\Phi_c(r,p_1',t)+\Phi_c(r,p',t)-\Phi_c(r,p_1,t)-\Phi_c(r,p,t)\right)$

③ $f_1^{(0)}(r,p,t) = \frac{n(r,t)}{(2\pi m k T(r,t))^{3/2}}\exp\left(-\frac{(p-mv)^2}{2mkT}\right)$

④ $\boxed{\frac{\tilde{D}}{\tilde{D}t} f_1^{(0)}(r,p,t) = f_1^{(0)}(r,p,t)\, L[\Phi_c]}$

• Changements de variables:

$$\begin{cases} \tau = \sqrt{\frac{kT_0}{m}}\frac{1}{\lambda}t \\ \overline{c} = \sqrt{\frac{m}{kT_0}}\,\overline{v} \\ \overline{u} = \frac{1}{\sqrt{mkT_0}}\overline{p} \\ \overline{x} = \frac{1}{\lambda}\overline{r} \end{cases}$$

$T_0 = \langle T(r,t)\rangle$ par exemple

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = \sqrt{\frac{kT_0}{m}}\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\tau}$; $\nabla_r = \frac{1}{\lambda}\nabla_x$; $\nabla_p = \frac{1}{\sqrt{mkT_0}}\nabla_u$

① devient:

$$\frac{\tilde{D}}{\tilde{D}t} = \sqrt{\frac{kT_0}{m}}\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\sqrt{mkT_0}}{m}\overline{u}\cdot\frac{1}{\lambda}\nabla_x + F(r)\frac{1}{\sqrt{mkT_0}}\nabla_u$$

④ devient:

$$\left(\sqrt{\frac{kT_0}{m}}\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\tau} + \sqrt{\frac{kT_0}{m}}\frac{1}{\lambda}\overline{u}\cdot\nabla_x + F(r)\frac{1}{\sqrt{mkT_0}}\nabla_u\right) f_1 = f_1\, L[\Phi_c]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial\tau} + \overline{u}\cdot\nabla_x + \underbrace{\frac{F(r)}{\cancel{}}\frac{1}{\sqrt{mkT_0}}\cdot\lambda\sqrt{\frac{m}{kT_0}}}\nabla_u\right) f_1 = \lambda\sqrt{\frac{m}{kT_0}}\, f_1 L[\Phi_c]$$

$$= \frac{\lambda\cdot F(r)}{kT_0} = \frac{m\lambda\cdot\frac{F(r)}{m}}{kT_0} = \underbrace{\frac{m\cdot\lambda\cdot\frac{F_0}{m}}{kT_0}}_{=\varepsilon}\underbrace{\frac{F(r)}{F_0}}_{=\tilde{F}(r)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial\tau} + \overline{u}\cdot\nabla_x + \varepsilon\tilde{F}(r)\cdot\nabla_u\right)}_{:=\frac{\tilde{D}}{\tilde{D}\tau}} f_1 = \lambda\cdot\sqrt{\frac{m}{kT_0}}\, f_1 L[\Phi_c]} \quad (*)$$

② devient:

$$L[\Phi_c] = \int_{\mathbb{R}^{3\times 2}} (mkT_0)^{3/2} d^3u_1\, d^3e' \frac{\sqrt{mkT_0}}{m}|u_1-u|\,\sigma\left(\chi, \sqrt{\frac{kT_0}{m}}|u_1-u|\right) f_1^{(0)}(r,p,t)\cdot(\dots)$$

$$= \frac{(mkT_0)^2}{m}\int_{\mathbb{R}^{3\times 2}} d^3u_1 d^3e' |u_1-u|\,\sigma\left(\chi, \sqrt{\frac{kT_0}{m}}|u_1-u|\right) f_1^{(0)}(r,p,t)\,(\dots)$$

Il reste à adimentionaliser la distribution de Boltzmann $f_1^{(0)}(r,p,t)$:

③ devient:

$$f_1^{(0)}(r,p,t) = \frac{n(r,t)\cdot\frac{n_0}{n_0}\cdot\frac{T_0}{T_0}}{(2\pi mkT(r,t))^{3/2}}\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{mkT_0}{mkT}(u-c)^2\right) \qquad \frac{T_0}{T} = 1/\tilde{T}(r,t)$$

$$= \frac{\overbrace{n(r,t)\frac{n_0}{n_0}}^{=\tilde{n}(r,t)}}{(2\pi m k T_0 \underbrace{\frac{T(r,t)}{T_0}}_{=\tilde{T}(r,t)})^{3/2}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(u-c)^2}{\tilde{T}(r,t)}}$$

$$= \frac{n_0}{m^{3/2}k^{3/2}T_0^{3/2}}\underbrace{\frac{\tilde{n}(r,t)}{(2\pi\tilde{T}(r,t))^{3/2}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(u-c)^2}{\tilde{T}(r,t)}}}_{=\tilde{f}_1^{(0)}(x,u,\tau)}$$

- calcul du membre de gauche de l'équation de Boltzmann. Essai n°xxxx... Reproduction des résultats des livres, avec dimensions.

La question qui va se poser est la suivante :

- les équations de conservation sont-elles vérifiées $\forall$ échelle de temps indépendamment des autres échelles de temps

$$\partial_{\tau_k}\{\dots\{\tau_k\}\} = \dots\{\dots\}\{\tau_k\}\}$$ } selon moi, la physique dit que c'est est correct : ex : éq. continuité

- les équations de conservation ne sont vérifiées que sur la somme de toutes les échelles de temps

$$\sum \varepsilon^k \partial_{\tau_k}\{\dots\{\tau_k\}\} = \dots\{\dots\}\{\tau_k\}\}$$ } ça, ce sont les maths uniquement qui le disent

↳ plus compliqué, violations de conservations à certaines échelles de temps...

- Calcul :

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial n}}_{①}\cdot\underbrace{\frac{\partial n}{\partial t}}_{②} + \underbrace{\overset{=\nabla_u f}{\overline{\frac{\partial f}{\partial \bar u}}}}_{③}\cdot\underbrace{\frac{\partial \bar u}{\partial t}}_{④} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial T}}_{⑤}\cdot\underbrace{\frac{\partial T}{\partial t}}_{⑥} + \Big(\underbrace{v\cdot\nabla_r}_{⑦} + \underbrace{\frac{F}{m}\nabla_v}_{⑧}\Big) f = f\, L(v)\Phi$$

avec :

$$②\ \frac{\partial n}{\partial t} = -\nabla_r(nu) = -u\cdot\nabla_r n - n\cdot\nabla_r u = -\sum_{i=1}^{3} u_i\frac{\partial n}{\partial r_i} - n\cdot\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial r_i}$$

$$④\ \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{n\cdot m}\Big(-nm(u\cdot\nabla_r)u + n\cdot F \cancel{+} \nabla_r(nkT)\Big) = \frac{1}{n\cdot m}\cdot\Big(-\sum_{i=1}^{3}u_i\frac{\partial}{\partial r_i}u\ nm + n\cdot F \cancel{+} kT\nabla_r n \cancel{+} nk\nabla_r T\Big)$$

$$⑥\ \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{2}{3}T\nabla_r u - u\nabla_r T$$

$$f = n\cdot\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m}{2kT}V^2\right) \qquad V = v-u\ ;\ \partial_V = \partial_v$$

$n = n(r,t)$ $u = u(r,t)$

$T = T(r,t)$

on calcule ainsi :

$$①\ \frac{\partial f}{\partial n} = \frac{1}{n}f$$

$$③\ \nabla_u f = -\nabla_V f = -\left(-\frac{m}{2kT}\right)2V f = \frac{m}{kT}V f$$

$$⑤\ \frac{\partial f}{\partial T} = n\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{T}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m}{2kT}V^2\right) + f\cdot\left(-\frac{m}{2k}V^2(-1)\frac{1}{T^2}\right)$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{1}{T}f + \frac{mV^2}{2kT^2}f$$

$$= \frac{1}{T}\left(-\frac{3}{2} + \frac{mV^2}{2kT}\right)f$$

$$⑧\ \frac{F}{m}\nabla_v f = -\frac{F}{m}\left(-\nabla_V f\right) = -\frac{F}{m}\frac{m}{kT}Vf = -\frac{F}{kT}\cdot Vf$$

$$⑦\ v\cdot\nabla_r f = v\cdot\nabla_r\left(n(r,t)\left(\frac{m}{2\pi k T(r,t)}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m}{2kT(r,t)}V^2\right)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{3}v_i\frac{\partial n}{\partial r_i}\cdot\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-mV^2/2kT} + v\cdot n(r,t)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial r}T\cdot\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m}{2kT}V^2\right)$$

$$+ n(r,t)\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-mV^2/2kT}\ v\cdot\left(-\frac{m}{2k}V^2\cdot(-1)\frac{1}{T^2}\nabla_r T\right)$$

$$+ f\sum_{i=1}^{3}v_i\cdot\left(-\frac{m}{2kT}\ \frac{\partial}{\partial r_i}\sum_{j=1}^{3}(v_j-u_j)^2\right)$$

$$= v\cdot\frac{\nabla_r n}{n}f - \frac{3}{2}v\cdot\frac{\nabla_r T}{T}f + fv\cdot\left(\frac{m}{2kT}V^2\frac{\nabla_r T}{T}\right) - f\frac{m}{2kT}\sum_{i=1}^{3}v_i\cdot\sum_{j=1}^{3}2(v_j-u_j)(-1)\frac{\partial u_j}{\partial r_i}$$

$$= f\cdot\left(v\cdot\frac{\nabla_r n}{n} - \frac{3}{2}v\cdot\frac{\nabla_r T}{T} + \frac{mV^2}{2kT}v\cdot\frac{\nabla_r T}{T} + \frac{m}{\cancel{2}kT}\cancel{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}v_i\ V_j\frac{\partial u_j}{\partial r_i}\right)$$

$$= f\cdot\left(v\cdot\frac{\nabla_r n}{n} + v\frac{\nabla_r T}{T}\left(-\frac{3}{2}+\frac{mV^2}{2kT}\right) + \frac{m}{kT}\sum_{ij=1}^{3}\cancel{v_i}\,V_i\ V_j\frac{\partial u_j}{\partial r_i}\right)$$

- Mettons tout ensemble :

$$\frac{1}{n}\cancel{f}\left(-\nabla_r nu\right) + \frac{m}{kT}V\cancel{f}\frac{1}{nm}\Big(-(u\nabla_r)u + nF + \nabla_r(nkT)\Big) + \frac{1}{T}\left(-\frac{3}{2}+\frac{mV^2}{2kT}\right)\cancel{f}\left(-\frac{2}{3}T\nabla_r u - u\nabla_r T\right)$$

$$+ \cancel{f}\left(v\frac{\nabla_r n}{n} + v\frac{\nabla_r T}{T}\left(-\frac{3}{2}+\frac{mV^2}{2kT}\right) + \frac{m}{kT}\sum_{ij=1}^{3}\cancel{v_i}V_i V_j\frac{\partial u_j}{\partial r_i}\right) - \frac{F}{kT}V\cancel{f} = \cancel{f}L(v)\Phi$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\left(-u\nabla_r n - n\nabla_r u\right) + \frac{V}{kTn}\left(\cancel{nF} - (u\nabla_r)u + kT\nabla_r n + nk\nabla_r T\right) - \frac{1}{T}\left(-\frac{3}{2}+\frac{mV^2}{2kT}\right)\left(\frac{2}{3}T\nabla_r u + u\nabla_r T\right)$$

$$+ v\frac{\nabla_r n}{n} + \left(-\frac{3}{2}+\frac{mV^2}{2kT}\right)v\cdot\frac{\nabla_r T}{T} + \frac{m}{kT}\sum_{ij=1}^{3}\cancel{v_i}V_i V_j\frac{\partial u_j}{\partial r_i} - \cancel{\frac{F}{kT}V} = L(v)\Phi$$

$$\Rightarrow -u\frac{\nabla_r n}{n} - \nabla_r u - \frac{1}{kTn}\sum_{ij=1}^{3}u_i\frac{\partial u_j}{\partial r_i}\cdot V_j + \frac{V}{\cancel{kT}n}(\nabla_r n)\cancel{kT} + \frac{V}{\cancel{kTn}}\cancel{nk}\nabla_r T + v\frac{\nabla_r n}{n}$$

$$+ \left(-\frac{3}{2}+\frac{mV^2}{2kT}\right)\frac{1}{T}\left(v\cdot\nabla_r T - \frac{3}{2}T\nabla_r u - u\nabla_r T\right) + \frac{m}{kT}\sum_{ij=1}^{3}\cancel{v_i}V_i V_j\frac{\partial u_j}{\partial r_i} = L(v)\Phi$$

$(v-2u)\nabla_r T$

} erreur de confusion V et v

Relation à trouver :

$$\left(\frac{mV^2}{2kT}-\frac{5}{2}\right)V\cdot\frac{\nabla_r T}{T} + \underbrace{\frac{m}{kT}\Big(\overbrace{V\cdot V}^{a_{ij}=V_iV_j} - \frac{1}{3}\underbrace{V^2 \mathbb{1}}_{a_{ij}=V_i^2\delta_{ij}}\Big):D}_{=\frac{m}{2kT}\sum_{ij}V_iV_j\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)-\frac{m}{6kT}\sum_{ij}V_i^2\delta_{ij}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}$$

$$D_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad A:B=\sum_{ij}A_{ij}B_{ij}$$

$$\sum_{ij}V_i^2\delta_{ij}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)=\sum_i V_i^2\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)=2\sum_i V_i^2\frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

$$\frac{m}{2kT}\sum_{ij}V_iV_j\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)-\frac{m}{3kT}\sum_i V_i^2\frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

• Calculs : suite

$$= (v-u) \to (2v-2u-u) = (2v-3u)$$

$$\Rightarrow -u\frac{\nabla_r n}{n} - \nabla_r u - \frac{1}{kTn}\sum_{ij=1}^{3} u_iV_j\frac{\partial u_j}{\partial r_i} + 2V\frac{\nabla_r n}{n} + V\frac{\nabla_r T}{T} + \left(-\frac{3}{2}+\frac{mV^2}{2kT}\right)\frac{1}{T}\left(-\frac{3}{2}T\nabla_r u + (V-u)\nabla_r T\right)$$

$$+\frac{m}{kT}\sum_{ij=1}^{3}\cancel{v_i}V_iV_j\frac{\partial u_j}{\partial r_i} = L(v)\Phi$$

$$\Rightarrow \underbrace{(2v-3u)}_{=2v-u}\frac{\nabla_r n}{n} - \nabla_r u + V\frac{\nabla_r T}{T} - \frac{1}{kTn}\sum_{ij=1}^{3}u_iV_j\frac{\partial u_j}{\partial r_i} - \frac{3}{2}\nabla_r u\left(-\frac{3}{2}+\frac{mV^2}{2kT}\right) + (V-u)\frac{\nabla_r T}{T}\left(-\frac{3}{2}+\frac{mV^2}{2kT}\right)$$

$$+\frac{m}{kT}\sum_{ij=1}^{3}\cancel{v_i}V_iV_j\frac{\partial u_j}{\partial r_i} = L(v)\Phi$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial r_i} = \frac{3}{2}\frac{mV^2}{2kT}-\frac{9}{4}+\frac{4}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\nabla_r T}{T}\cdot\left(V + (V-u)\left(\frac{mV^2}{2kT}-\frac{3}{2}\right)\right) - \nabla_r u\left(1+\frac{3}{2}\left(\frac{mV^2}{2kT}-\frac{3}{2}\right)\right) - \frac{1}{kTn}\sum_{ij=1}^{3}u_iV_j\frac{\partial u_i}{\partial r_i}$$

$$= (V-u)\frac{mV^2}{2kT} - \underbrace{\tfrac{3}{2}V + \tfrac{3}{2}V}_{=-1/2 V} + \tfrac{3}{2}u = V\frac{mV^2}{2kT} - u\frac{mV^2}{2kT} - \tfrac{1}{2}V + \tfrac{3}{2}u = V\left(\frac{mV^2}{2kT}-\tfrac{1}{2}\right) + u\left(\frac{mV^2}{2kT}-\tfrac{3}{2}\right)$$

$$+\frac{m}{kT}\sum_{ij=1}^{3}\cancel{v_i}V_iV_j\frac{\partial u_j}{\partial r_i} + (2V-u)\frac{\nabla_r n}{n} = L(v)\Phi$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\nabla_r T}{T}\left(V_i\left(\frac{mV^2}{2kT}-\frac{1}{2}\right) - u\left(\frac{mV^2}{2kT}-\tfrac{3}{2}\right)\right)} \boxed{-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial r_i}\left(\frac{3}{2}\frac{mV^2}{2kT}-\tfrac{5}{4}\right) - \frac{1}{kTn}\sum_{ij=1}^{3}u_iV_j\frac{\partial u_j}{\partial r_i}}$$

$$\boxed{+\frac{m}{kT}\sum_{ij=1}^{3}\cancel{v_i}V_iV_j\frac{\partial u_j}{\partial r_i}} + \boxed{(2V-u)\frac{\nabla_r n}{n}} = L(v)\Phi$$

coefficient de $\nabla_r T/T$: • contient u : ↯
• $\frac{mV^2}{2kT} - 1/2$: ↯

terme $\nabla_r n/n$ devrait pas exister !

coefficient de $:D$: • contient n : ↯
• pas réussi à mettre en évidence $:D$
• mauvais coefficient : u et pas V : u_iV_j

Essai no2 :

$$\underset{①}{\frac{\partial f}{\partial n}}\underset{②}{\frac{\partial n}{\partial t}} + \underset{③}{\nabla_u f}\cdot\underset{④}{\frac{\partial u}{\partial t}} + \underset{⑤}{\frac{\partial f}{\partial T}}\cdot\underset{⑥}{\frac{\partial T}{\partial t}} + \underset{⑦}{v\cdot\nabla_r f} + \underset{⑧}{\frac{F}{m}\nabla_v f} = f\, L(v)\,\Phi_1$$

$$f = n(r,t)\cdot\left(\frac{m}{2\pi k T(r,t)}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m}{2kT(r,t)}V^2\right) \qquad V = v-u$$

• avec :

avec $p(r,t) = n(r,t)\cdot k_B T(r,t)$

② $\frac{\partial n}{\partial t} = -\nabla_r(n\cdot u)$

④ $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{m\cdot n}\left(-(u\cdot\nabla_r)u + n\cdot F - \nabla_r(n k T)\right)$ $n\cdot m$ unité : ✗ erreur $= \frac{1}{nm}\left(-nm\,(u\nabla_r)u + nF - \nabla_r(nkT)\right)$

signe ?

⑥ $\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{2}{3}T\cdot\nabla_r u - u\cdot\nabla_r T$

• on calcule :

① $\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{1}{n}f$

③ $\nabla_u f = -\nabla_V f = +\left(\frac{m}{2kT(r,t)}\right)2Vf = +\frac{m}{kT(r,t)}Vf$

⑤ $\frac{\partial f}{\partial T} = n(r,t)\cdot\left(\frac{m}{2\pi k}\right)^{3/2}\cdot\exp(\dots)\cdot\underbrace{\frac{\partial}{\partial T}\frac{1}{T^{3/2}}}_{=-\frac{3}{2}\frac{1}{T^{1/2}}\frac{1}{T}} + n(r,t)\cdot\left(\ \right)^{3/2}\cdot e\cdot\left(-\frac{m}{2k}V^2\underbrace{\frac{\partial}{\partial T}\frac{1}{T(r,t)}}_{=-\frac{1}{T^2}}\right)$

$$= -\frac{3}{2}\frac{1}{T(r,t)}f + \frac{mV^2}{2kT(r,t)^2}f$$

$$= \frac{1}{T}\cdot f\cdot\left(-\frac{3}{2} + \frac{mV^2}{2kT}\right)$$

⑧ $\frac{F}{m}\nabla_v f = \frac{F}{m}\nabla_V f = f\cdot\frac{1}{m}\,F\cdot\nabla_V\left(-\frac{m}{2kT}V^2\right) = f\cdot\frac{1}{\cancel{m}}(-1)\frac{\cancel{m}}{2kT}\sum_{i=1}^{3}F_i\frac{\partial}{\partial V_i}\sum_{j=1}^{3}V_j^2$

$$= -f\frac{1}{2kT}\sum_{ij}F_i\frac{\partial V_j^2}{\partial V_i} \qquad = 2V_j\frac{\partial V_j}{\partial V_i} = 2V_j\delta_{ij}$$

$$= -f\frac{1}{kT}\sum_i F_i V_i$$

$$= -\frac{1}{kT}F\cdot V\cdot f$$

⑦ $v\cdot\nabla_r f = v\cdot\nabla_r\, n(r,t)\cdot\left(\frac{m}{2\pi kT(r,t)}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m}{2kT(r,t)}V^2\right)$

$$= v\cdot\frac{\nabla_r n}{n}f - \frac{3}{2}v\cdot\frac{\nabla_r T}{T}f + \frac{m}{2kT}V^2\, v\cdot\frac{\nabla_r T}{T}f - \frac{m}{2kT}v\cdot\nabla_r V^2 f$$

$$= f\cdot\left(v\frac{\nabla_r n}{n} - \frac{3}{2}v\cdot\frac{\nabla_r T}{T} + \frac{mV^2}{2kT}v\cdot\frac{\nabla_r T}{T} + \frac{m}{\cancel{2}kT}\sum_{i=1}^{3}v_i\underbrace{\frac{\partial}{\partial r_i}\sum_{j=1}^{3}(v_j-u_j)^2}_{=2(v_j-u_j)\frac{\partial}{\partial r_i}(v_j-u_j)}\right)$$

$$= +(v_j-u_j)\frac{\partial u_j}{\partial r_i}$$

jusqu'ici, c'est bien la même chose

$$= f\cdot\left(v\cdot\frac{\nabla_r n}{n} + v\cdot\frac{\nabla_r T}{T}\cdot\left(-\frac{3}{2}+\frac{mV^2}{2kT}\right) + \frac{m}{kT}\sum_{ij}v_i\underbrace{(v_j-u_j)}_{=V_j}\frac{\partial u_j}{\partial r_i}\right)$$

$$= f\left(v\frac{\nabla_r n}{n} + v\frac{\nabla_r T}{T}\left(-\frac{3}{2}+\frac{mV^2}{2kT}\right) + \frac{m}{kT}\sum_{ij}v_iV_j\frac{\partial u_j}{\partial r_i}\right)$$

• on met tout ensemble : (simplifie par f)

$$\frac{1}{n}(-1)\underbrace{\nabla_r(nu)}_{=n\nabla_r u + u\nabla_r n} + \frac{\cancel{m}}{kT}V\cdot\frac{1}{\cancel{m}n}\left(-\underbrace{(u\cdot\nabla_r)u}_{=\left(\sum_i u_i\frac{\partial}{\partial r_i}\right)u} + \cancel{nF} + \underbrace{\nabla_r(nkT)}_{=(\nabla_r n)kT + n\nabla_r T\,k}\right)$$

$$\left(-\frac{2}{3}T\cdot\nabla_r u - u\nabla_r T\right)\frac{1}{T}\left(-\frac{3}{2}+\frac{mV^2}{2kT}\right) + \left(v\frac{\nabla_r n}{n} + v\frac{\nabla_r T}{T}\left(-3/2+\frac{mV^2}{2kT}\right) + \frac{m}{kT}\sum_{ij}v_iV_j\frac{\partial u_j}{\partial r_i}\right)$$

$$-\frac{1}{kT}\cancel{F\cdot}V$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{n}(n\nabla_r u + u\nabla_r n) + \frac{1}{kT}V\left(-\frac{1}{n}\left(\sum_i u_i\frac{\partial}{\partial r_i}\right)u + kT\frac{\nabla_r n}{n} + k\nabla_r T\right)$$

$$\left(-\frac{2}{3}\nabla_r u - u\frac{\nabla_r T}{T}\right)\left(-\frac{3}{2}+\frac{mV^2}{2kT}\right) + v\cdot\frac{\nabla_r n}{n} + \left(-\frac{3}{2}+\frac{mV^2}{2kT}\right)v\cdot\frac{\nabla_r T}{T} + \frac{m}{kT}\sum_{ij}v_iV_j\frac{\partial u_j}{\partial r_i}$$

$$\Rightarrow -\nabla_r u + u\frac{\nabla_r n}{n} - V\frac{1}{nkT}\left(\sum_i u_i\frac{\partial}{\partial r_i}\right)u + V\frac{\nabla_r n}{n} + V\frac{\nabla_r T}{T}$$

$$+\left(-\frac{3}{2}+\frac{mV^2}{2kT}\right)\left(-\frac{2}{3}\nabla_r u \underbrace{- u\frac{\nabla_r T}{T} + v\cdot\frac{\nabla_r T}{T}}_{=V\frac{\nabla_r T}{T}}\right) + v\cdot\frac{\nabla_r n}{n} + \frac{m}{kT}\sum_{ij}v_iV_j\frac{\partial u_j}{\partial r_i}$$

$$(V+v)\frac{\nabla_r n}{n} \to (V+\underbrace{v+u}_{=V+2u})\frac{\nabla_r n}{n}$$

$= 2(V+u)$

$$\Rightarrow -\nabla_r u + 2(\nabla + u)\frac{\nabla_r n}{n} - \underbrace{\nabla \frac{1}{nkT}\left(\sum_i u_i \frac{\partial}{\partial r_i}\right)u}_{} + \nabla \frac{\nabla_r T}{T} + \left(\cancel{1} - \frac{3}{2} + \frac{m\nabla^2}{2kT}\right)\left(\nabla\frac{\nabla_r T}{T} - \frac{2}{3}\nabla_r u\right)$$

$$+ \frac{m}{kT}\sum_{ij} v_i \nabla_j \frac{\partial u_j}{\partial r_i} \qquad = \frac{1}{nkT}\sum_{ji} \nabla_j u_i \frac{\partial}{\partial r_i} u_j$$

$$\nabla_i = v_i + u_i \Rightarrow v_i = \nabla_i - u_i \qquad = \frac{1}{nkT}\sum_{ij} u_i \nabla_j \frac{\partial u_j}{\partial r_i}$$

$$= \frac{m}{kT}\sum_{ij}\nabla_i\nabla_j\frac{\partial u_j}{\partial r_i} - \frac{m}{kT}\sum_{ij} u_i \nabla_j \frac{\partial u_j}{\partial r_i}$$

$$\Rightarrow -\sum_i \frac{\partial u_i}{\partial r_i} + 2(\nabla + u)\frac{\nabla_r n}{n} - \cancel{\frac{1}{nkT}\sum_{ij} u_i \nabla_j \frac{\partial u_j}{\partial r_i}}$$

devrait être -1

$$+ \frac{1}{kT}\left(\frac{1}{n} - m\right)\sum_{ij} u_i \nabla_j \frac{\partial u_j}{\partial r_i} + \frac{m}{kT}\sum_{ij}\nabla_i\nabla_j\frac{\partial u_j}{\partial r_i} + \nabla\frac{\nabla_r T}{T}\left(1 + \frac{m\nabla^2}{2kT} - \frac{3}{2}\right)$$

$= -1/2$

$$-\frac{2}{3}\nabla_r u\left(-\frac{3}{2} + \frac{m\nabla^2}{2kT}\right)$$

$\Longrightarrow$ conclusion : il faut recalculer ces lois de conservation !!! qui sont fausses...

• avec (1) corrigé on obtient :

$$\frac{1}{n}\cancel{f}(-1)\nabla_r(nu) + \frac{\cancel{m}}{kT}\nabla\cancel{f}\frac{1}{\cancel{mn}}\left(-n\cdot m(u\nabla_r)u + nF - \nabla_r(nkT)\right)$$

$$+ \frac{1}{T}\cancel{f}\left(-3/2 + \frac{m\nabla^2}{2kT}\right)\left(-\frac{2}{3}T\nabla_r u - u\nabla_r T\right) + \cancel{f}\left(\nabla\frac{\nabla_r n}{n} + \nabla\frac{\nabla_r T}{T}\left(-\frac{3}{2} + \frac{m\nabla^2}{2kT}\right) + \frac{m}{kT}\sum_{ij}v_i\nabla_j\frac{\partial u_j}{\partial r_i}\right)$$

$$-\frac{1}{kT}F\cdot\nabla\cancel{f} = \cancel{f}L(v)\Phi$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{n}u\nabla_r n - \cancel{\frac{1}{n}}\cancel{n}\nabla_r u + \frac{1}{kT}\nabla(-1)\cancel{n}\cdot m(u\nabla_r)u + \frac{1}{k\cancel{T}}\cancel{\nabla}\cancel{n}F - \frac{1}{kTn}\nabla\nabla_r(nkT)$$

$$-\frac{1}{T}\left(\frac{2}{3}T\nabla_r u + u\nabla_r T\right)\left(\frac{m\nabla^2}{2kT} - 3/2\right) + \nabla\frac{\nabla_r n}{n} + \nabla\frac{\nabla_r T}{T}\left(\frac{m\nabla^2}{2kT} - 3/2\right) + \frac{m}{kT}\sum_{ij}v_i\nabla_j\frac{\partial u_j}{\partial r_i} - \cancel{\frac{1}{kT}F\nabla} = \ldots$$

$$\Rightarrow -u\frac{\nabla_r n}{n} - \nabla_r u - \frac{m}{kT}\nabla(u\nabla_r)u - \frac{1}{\cancel{k}Tn}\nabla\cancel{k}\left(n\nabla_r T + T\nabla_r n\right)$$

$$-\left(\frac{2}{3}\nabla_r u + u\frac{\nabla_r T}{T}\right)\left(\frac{m\nabla^2}{2kT} - 3/2\right) + \nabla\frac{\nabla_r n}{n} + \nabla\frac{\nabla_r T}{T}\left(\frac{m\nabla^2}{2nT} - 3/2\right) + \frac{m}{kT}\sum_{ij}v_i\nabla_j\frac{\partial u_j}{\partial r_i} = \ldots$$

$$= (\nabla - u)\frac{\nabla_r n}{n} = \nabla\frac{\nabla_r n}{n}$$

$$\Rightarrow \cancel{\nabla\frac{\nabla_r n}{n}} - \nabla_r u - \frac{m}{kT}\nabla(u\nabla_r)u - \nabla\frac{\nabla_r T}{T} - \cancel{\nabla\frac{\nabla_r n}{n}} - \frac{2}{3}\nabla_r u\left(\frac{m\nabla^2}{2kT} - 3/2\right) - u\frac{\nabla_r T}{T}\left(\frac{m\nabla^2}{2kT} - 3/2\right)$$

$$+ \nabla\frac{\nabla_r T}{T}\left(\frac{m\nabla^2}{2kT} - 3/2\right) + \frac{m}{kT}\sum_{ij}v_i\nabla_j\frac{\partial u_j}{\partial r_i} = \ldots$$

$$\Rightarrow \frac{\nabla_r T}{T}\cdot\left(-\nabla \underbrace{- u\left(\frac{m\nabla^2}{2kT} - 3/2\right) + \nabla\left(\frac{m\nabla^2}{2kT} - 3/2\right)}_{=\nabla}\right) - \nabla_r u - \frac{m}{kT}\nabla(u\nabla_r)u - \frac{2}{3}\nabla_r u\left(\frac{m\nabla^2}{2kT} - 3/2\right)$$

$$+ \frac{m}{kT}\sum_{ij}v_i\nabla_j\frac{\partial u_j}{\partial r_i} = \ldots \qquad = \nabla\left(\frac{m\nabla^2}{2kT} - 3/2\right) - \nabla = \nabla\left(\frac{m\nabla^2}{2kT} - 5/2\right)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\frac{m\nabla^2}{2kT} - 5/2\right)\nabla\cdot\frac{\nabla_r T}{T}}_{\text{terme correct !}} \underbrace{- \nabla_r u - \frac{m}{kT}\nabla(u\nabla_r)u - \frac{2}{3}\nabla_r u\left(\frac{m\nabla^2}{2kT} - 3/2\right) + \frac{m}{kT}\sum_{ij}v_i\nabla_j\frac{\partial u_j}{\partial r_i}}_{\text{reste à voir que ce terme est égal à } \beta m(\nabla\nabla - \frac{1}{3}\nabla^2 1\!\!1):\Lambda} = \ldots$$

laisse tomber.

• terme de viscosité :

$$-\cancel{\nabla_r u} - \frac{m}{kT}\nabla(u\nabla_r)u - \frac{2}{3}\nabla_r u\frac{m\nabla^2}{2kT} + \cancel{\frac{2}{3}\frac{3}{2}\nabla_r u} + \frac{m}{kT}\sum_{ij}v_i\nabla_j\frac{\partial u_j}{\partial r_i}$$

$$= \frac{m}{kT}\left(-\nabla(u\nabla_r)u - \frac{\cancel{2}}{3}\nabla_r u\frac{1}{\cancel{2}}\nabla^2 + \sum_{ij}v_i\nabla_j\frac{\partial u_j}{\partial r_i}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\sum_i \nabla_i^2\frac{\partial u_i}{\partial r_i} = -\frac{1}{3}\nabla^2 1\!\!1 : D$$

$$= \frac{m}{kT}\left(\underbrace{-\nabla(u\nabla_r)u + \sum_{ij}v_i\nabla_j\frac{\partial u_j}{\partial r_i}}_{\text{dernier terme.}} \underbrace{- \frac{\nabla^2}{3}1\!\!1 : D}_{\text{terme correct !}}\right)$$

• or on doit trouver avec ce terme:

$$\mathbb{V}\cdot\mathbb{V}:D = \frac{1}{2}\sum_{ij} V_i V_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j}+\frac{\partial u_j}{\partial r_i}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{ij} V_i V_j \frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \sum_{ij} V_i V_j \frac{\partial u_j}{\partial r_i}$$

• et on a: $\circledast$

$$\underbrace{-\mathbf{V}\cdot(u\cdot\nabla_r)u} + \sum_{ij} V_i V_j \frac{\partial u_j}{\partial r_i}$$

$$= -V\cdot\sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial}{\partial r_i} u$$

$$= -\sum_{ij=1}^{3} V_j u_i \frac{\partial u_j}{\partial r_i}$$

$$\Rightarrow \sum_{ij} V_i V_j \frac{\partial u_j}{\partial r_i} - \sum_{ij} u_i V_j \frac{\partial u_j}{\partial r_i}$$

$$\Rightarrow \sum_{ij} \underbrace{(v_i - u_i)}_{=V_i}\cdot V_j \frac{\partial u_j}{\partial r_i}$$

$$\Rightarrow \sum_{ij} V_i V_j \frac{\partial u_j}{\partial r_i}$$

or en changeant $i \leftrightarrow j$, on a: $\sum_{ij} V_i V_j \frac{\partial u_j}{\partial r_i} = \sum_{ij} V_i V_j \frac{\partial u_i}{\partial r_j}$, d'où:

$$\circledast = \frac{1}{2}\sum_{ij} V_i V_j \left(\frac{\partial u_j}{\partial r_i}+\frac{\partial u_i}{\partial r_j}\right)$$

$$= \mathbb{V}\cdot\mathbb{V}:D$$

ce qui établit la relation cherchée !!!

Résumé

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial n}}_{①}\cdot\underbrace{\frac{\partial n}{\partial t}}_{②} + \underbrace{\nabla_u f}_{③}\cdot\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{④} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial T}}_{⑤}\cdot\underbrace{\frac{\partial T}{\partial t}}_{⑥} \underbrace{+ v\cdot\nabla_r f}_{⑦} \underbrace{+ \frac{F}{m}\nabla_v f}_{⑧} = f\, L(v)\,\Phi_1$$

$$f = n(r,t)\left(\frac{m}{2\pi k T(r,t)}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m}{2kT(r,t)}\mathbf{V}^2\right) \quad , \quad \mathbf{V} = v - u$$

- avec les lois de conservation:

② $\chi = 1$: $\frac{\partial n}{\partial t} = -\nabla_r(nu)$

④ $\chi = v$: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{m\cdot n}\left(-n\cdot m\cdot(u\nabla_r)u + n\cdot F - \nabla_r(nkT)\right)$, avec $\underset{\text{pression hydrostatique}}{p} = n k_B T$

⑥ $\chi = v^2$: $\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{2}{3}T\nabla_r u - u\nabla_r T$

- et on calcule:

① $\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{1}{n} f$

③ $\nabla_u f = \frac{m}{kT}\mathbf{V} f$

⑤ $\frac{\partial f}{\partial T} = \frac{1}{T} f\left(-\frac{3}{2} + \frac{m\mathbf{V}^2}{2kT}\right)$

⑧ $\frac{F}{m}\nabla_v f = -\frac{1}{kT} F\cdot\mathbf{V} f$

⑦ $v\nabla_r f = f\left(v\frac{\nabla_r n}{n} + v\frac{\nabla_r T}{T}\left(\frac{m\mathbf{V}^2}{2kT} - \frac{3}{2}\right) + \frac{m}{kT}\sum_{ij} v_i \mathbf{V}_j \frac{\partial u_j}{\partial r_i}\right)$

- on met tout ensemble pour calculer l'équation de Boltzmann, et on arrive rapidement à :

$$\left(\frac{m\mathbf{V}^2}{2kT} - \frac{5}{2}\right)\mathbf{V}\cdot\frac{\nabla_r T}{T} + \frac{m}{kT}\Bigg(\underbrace{-\mathbf{V}(u\nabla_r)u + \sum_{ij=1}^{3} v_i \mathbf{V}_j \frac{\partial u_j}{\partial r_i}}_{} \underbrace{- \frac{2}{3}\nabla_r u\, \frac{1}{2}\mathbf{V}^2}_{}\Bigg) = L(v)\Phi_1$$

$$= \sum_{ij} \underbrace{(v_i - u_i)}_{=\mathbf{V}_i} \mathbf{V}_j \frac{\partial u_j}{\partial r_i} = \frac{1}{2}\sum_{ij}\mathbf{V}_i\mathbf{V}_j\left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i}\right)\cdot\frac{1}{2} = \mathbf{V}\mathbf{V} : \Lambda$$

$$= -\frac{1}{3}\sum_i \mathbf{V}_i^2\frac{\partial u_i}{\partial r_i} = -\frac{1}{3}\sum_i \mathbf{V}_i^2\,\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial r_i} + \frac{\partial u_i}{\partial r_i}\right) = -\frac{1}{3}\sum_{ij}\mathbf{V}_i^2\,\delta_{ij}\,\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i}\right) = -\frac{1}{3}\mathbf{V}^2\mathbb{1} : \Lambda$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{m\mathbf{V}^2}{2kT} - \frac{5}{2}\right)\mathbf{V}\cdot\frac{\nabla_r T}{T} + \frac{m}{kT}\left(\mathbf{V}\mathbf{V} - \frac{\mathbf{V}^2}{3}\mathbb{1}\right) : \Lambda = L(v)\,\Phi_1}$$

<u>À faire</u>: – écrire les lois de conservation du système adimensionalisé : conservation à chaque échelle de temps (ce qui est différent du pure chgt. de variables mathématique : "hypothèse" supplémentaire). De plus, on va dire qu'il n'existe qu'un seul champ T, V, n $\forall$ pas de temps (i.e. on ne fait pas le développement de ces grandeurs en puissances de ε).

– remplacer ces lois dans l'équation de Boltzmann et tourner la manivelle.

<u>notations</u> :

ici	moi
n, T	$\tilde{n}, \tilde{T}$
u	c
V $\leftrightarrow$	P Δ unités

$\Rightarrow$

$$\sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \Big\{ -c\frac{\nabla_x \tilde n}{\tilde n} - \nabla_x C + (u-c)\frac{1}{\tilde T}(-1)(c\nabla_x)c + (u-c)\cdot\frac{1}{\tilde T}\tilde F - (u-c)\frac{\nabla_x\tilde n}{\tilde n} - (u-c)\frac{\nabla_x \tilde T}{\tilde T}$$

$$-\frac{2}{3}\nabla_x C\left(\frac{(u-c)^2}{2\tilde T}-\frac32\right) - c\frac{\nabla_x\tilde T}{\tilde T}\left(\frac{(u-c)^2}{2\tilde T}-\frac32\right)$$

$$+ u\frac{\nabla_x \tilde n}{\tilde n}\delta_{k,0} + u\frac{\nabla_x\tilde T}{\tilde T}\left(\frac{(u-c)^2}{2\tilde T}-\frac32\right)\delta_{k,0} + \frac1T\sum_{ij} u_i(u-c)_j\frac{\partial c_j}{\partial x_i}\delta_{k,0} - \tilde F\cdot(u-c)\frac{1}{\tilde T}\delta_{k,0}$$

$$= \sum_{k\geq0}\varepsilon^k L[\Phi_c^{(k)}]$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{k\geq0} \varepsilon^k\Big\{ \frac{\nabla_x\tilde n}{\tilde n}(u\delta_{k,0}-c) - \cancel{\nabla_x C} - \frac1{\tilde T}(u-c)(c\nabla_x)c + \varepsilon\frac1{\tilde T}(u-c)\tilde F(1-\delta_{k,0})$$

$$-(u-c)\frac{\nabla_x\tilde n}{\tilde n} - (u-c)\frac{\nabla_x\tilde T}{\tilde T} - \frac23\cancel{\nabla_x C}\left(-\frac32\right) - \frac{\cancel{2}}{3}\nabla_x C\frac{(u-c)^2}{\cancel{2}\tilde T}$$

$$+ \frac{\nabla_x\tilde T}{\tilde T}\left(\frac{(u-c)^2}{2\tilde T}-\frac32\right)(u\delta_{k,0}-c) + \frac1T\sum_{ij}u_i(u-c)_j\frac{\partial c_j}{\partial x_i}\delta_{k,0} = \sum\dots$$

avant : rannulait

$$\Rightarrow \sum_{k\geq0}\varepsilon^k\Big\{\frac{\nabla_x\tilde n}{\tilde n}\left(-u+\cancel{c}-\cancel{c}+u\delta_{k,0}\right) - \frac1{\tilde T}(u-c)(c\nabla_x)c + \varepsilon\frac{(u-c)\tilde F}{\tilde T}(1-\delta_{k,0})$$

$$+\frac{\nabla_x\tilde T}{\tilde T}\left(\left(\frac{(u-c)^2}{2\tilde T}-\frac32\right)(u\delta_{k,0}-c) \cancel{-(u-c)} -u+c\right) - \frac13\frac1{\tilde T}\nabla_x C(u-c)^2$$

terme ①

$$+\frac1T\sum_{ij}u_i(u-c)_j\frac{\partial c_j}{\partial x_i}\delta_{k,0}\Big\} = \sum\dots$$

$$\Rightarrow\sum_{k\geq0} \varepsilon^k\Big\{\frac{\nabla_x \tilde n}{\tilde n}\cdot u(1-\delta_{k,0}) + \frac{\nabla_x\tilde T}{\tilde T}\Big(\underbrace{\left(\frac{(u-c)^2}{2\tilde T}-\frac32\right)(u\delta_{k,0}-c)}_{(\cdot)u\delta_{k0}+(\cdot)(-c)+(\,)(u)-(\cdot\cdot)(u)} - (u-c)\Big)$$

$= (\cdot\cdot)(u-c)$ ce qu'on avait avant

$$+\frac1{\tilde T}\Big(-(u-c)(c\nabla_x)c + \varepsilon(u-c)\vec F(1-\delta_{k,0}) - \frac13\nabla_x C(u-c)^2 + \sum_{ij}u_i(u-c)_j\frac{\partial c_j}{\partial x_i}\delta_{k,0}\Big)\Big\}$$

$$\Rightarrow \sum_{k\geq0}\varepsilon^k\Big\{\frac{\nabla_x\tilde n}{\tilde n}u(1-\delta_{k0}) + \frac{\nabla_x\tilde T}{\tilde T}\left(\left(\frac{(u-c)^2}{2\tilde T}-\frac52\right)(u-c) + \left(\frac{(u-c)^2}{2\tilde T}-\frac32\right)u(\delta_{k0}-1)\right)$$

$$+\frac1{\tilde T}\Big(-(u-c)(c\nabla_x)c + \sum_{ij}u_i(u-c)_j\frac{\partial c_j}{\partial x_i}\delta_{k0} + \sum_{ij}u_i(u-c)_j\frac{\partial c_j}{\partial x_i} - \sum_{ij}u_i(u-c)_j\frac{\partial c_j}{\partial x_i} \underbrace{- \frac13\nabla_x C(u-c)^2}_{=-\frac13(u-c)^2\mathbb{1}:\Lambda} + \varepsilon(u-c)\hat F(1-\delta_{k0})\Big)\Big\} =$$

$\hookrightarrow = (u-c)\cdot(u-c):\Lambda$

$$\Rightarrow\sum_{k\geq0}\varepsilon^k\Big\{\frac{\nabla_x\tilde n}{\tilde n}u(1-\delta_{k0}) + \frac{\nabla_x\tilde T}{\tilde T}\left(\left(\frac{(u-c)^2}{2\tilde T}-\frac52\right)(u-c) + (\delta_{k0}-1)\left(\frac{(u-c)^2}{2\tilde T}-\frac32\right)u\right)$$

$$+\frac1{\tilde T}\left(\left((u-c)(u-c)-\frac13(u-c)^2\mathbb 1\right):\Lambda + \sum_{ij}u_i(u-c)_j\frac{\partial c_j}{\partial x_i}(\delta_{k0}-1) + \varepsilon(u-c)\vec F(1-\delta_{k0})\right)\Big\} = \sum_{k\geq0}$$

+ égalité à tout ordre

• l'équation à résoudre :

$$\left(\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k\frac{\partial}{\partial\tau_k}+u\nabla x+\varepsilon\tilde F(x)\nabla u\right)f_1^{(\infty)}=f_1^{(\infty)}\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k L[\Phi_c^{(k)}]$$

$$L=\frac{\partial\tilde n}{\partial\tau_k}\frac{\partial}{\partial\tilde n}+\frac{\partial c}{\partial\tau_k}\nabla_c+\frac{\partial\tilde T}{\partial\tau_k}\frac{\partial}{\partial\tilde T}$$

$$\Rightarrow\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k\left(\underset{①}{\frac{\partial\tilde n}{\partial\tau_k}}\underset{②}{\frac{\partial f}{\partial\tilde n}}+\underset{③}{\nabla_c f}\underset{④}{\frac{\partial c}{\partial\tau_k}}+\underset{⑤}{\frac{\partial\tilde T}{\partial\tau_k}}\underset{⑥}{\frac{\partial f}{\partial\tilde T}}\right)+\underset{⑦}{u\cdot\nabla_x f}+\underset{⑧}{\varepsilon\tilde F(x)\cdot\nabla_u f}=f\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k L[\Phi_c^{(k)}]$$

• les lois de conservation sont :

i) $\chi=1$: $\frac{\partial n}{\partial t}=-\nabla_r(n\,u)$ — vitesse du champ moyen, chez moi v — : adimensionalisation : $\tau=\sqrt{\frac{kT_0}{m}}\frac{1}{\lambda}t\Rightarrow\frac{1}{t}=\sqrt{\frac{kT_0}{m}}\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\tau}$

$n=n_0\tilde n$

$v=\sqrt{\frac{kT_0}{m}}c$

$x=1/\lambda\, r\Rightarrow\frac{\partial}{\partial r}=\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x}$

$$\Rightarrow\cancel{\sqrt{\frac{kT_0}{m}}}\cancel{\frac{1}{\lambda}}\frac{\partial}{\partial\tau}(\cancel{n_0}\tilde n)=-\cancel{\frac{1}{\lambda}}\nabla_x\left(\cancel{n_0}\tilde n\cancel{\sqrt{\frac{kT_0}{m}}}c\right)$$

$$\Rightarrow ①\ \boxed{\frac{\partial\tilde n}{\partial\tau_k}=-\nabla_x(\tilde n c)}$$

ii) $\chi=p$: $\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{1}{m\cdot n}\cdot\left(-n\cdot m(v\nabla_r)v+nF-\nabla_r(nkT)\right)$: adimensionalisation : $F=\tilde F F_0$; $T=\tilde T T_0$

$$\underbrace{\sqrt{\frac{kT_0}{m}}\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\sqrt{\frac{kT_0}{m}}c\right)}_{\frac{kT_0}{m}\frac{1}{\lambda}}=\frac{1}{mn_0\tilde n}\left(-n_0\tilde n\, m\underbrace{\left(\sqrt{\frac{kT_0}{m}}c\frac{1}{\lambda}\nabla x\right)\sqrt{\frac{kT_0}{m}}}_{\frac{kT_0}{m}\frac{1}{\lambda}}c+\tilde n n_0\tilde F F_0-\frac{1}{\lambda}\nabla_x(\tilde n n_0 k\tilde T T_0)\right)$$

$$\Rightarrow\frac{\partial c}{\partial\tau}=\frac{1}{mn_0\tilde n}\cdot\frac{m\lambda}{kT_0}\left(-mn_0\tilde n\frac{kT_0}{m\lambda}(c\nabla x)c+n_0F_0\tilde n\tilde F-\frac{n_0T_0}{\lambda}\nabla_x(\tilde n k\tilde T)\right)$$

$$\Rightarrow\frac{\partial c}{\partial\tau}=\frac{1}{mn_0\tilde n}\left(-mn_0\tilde n(c\nabla x)c+\frac{m\lambda F_0}{kT_0}n_0\tilde n\tilde F-\cancel{n_0T_0k}\cancel{\frac{m\lambda}{\lambda kT_0}}\nabla_x(\tilde n\tilde T)\right)$$

$$\Rightarrow\frac{\partial c}{\partial\tau}=\frac{1}{\tilde n}\left(-\frac{mn_0}{mn_0}\tilde n(c\nabla x)c+\underbrace{\frac{m\lambda F_0}{kT_0}}_{=\varepsilon}\frac{n_0}{mn_0}\tilde n\tilde F-\frac{n_0 m}{mn_0}\nabla_x(\tilde n\tilde T)\right)$$

$$\Rightarrow ④\ \boxed{\frac{\partial c}{\partial\tau_k}=\frac{1}{\tilde n}\left(-\tilde n(c\nabla x)c+\varepsilon\tilde n\tilde F-\nabla_x(\tilde n\tilde T)\right)}$$

iii) $\chi=p^2$: $\frac{\partial T}{\partial t}=-\frac{2}{3}T\nabla_r v-v\nabla_r T$: adimensionalisation

$$\cancel{\sqrt{\frac{kT_0}{m}}}\cancel{\frac{1}{\lambda}}\frac{\partial}{\partial\tau}(\tilde T T_0)=-\frac{2}{3}\tilde T T_0\cancel{\frac{1}{\lambda}}\nabla_x\left(\cancel{\sqrt{\frac{kT_0}{m}}}c\right)-\cancel{\sqrt{\frac{kT_0}{m}}}c\cancel{\frac{1}{\lambda}}\nabla_x(\tilde T T_0)$$

$$\Rightarrow ⑤\ \boxed{\frac{\partial\tilde T}{\partial\tau_k}=-\frac{2}{3}\tilde T\nabla_x c-c\cdot\nabla_x\tilde T}$$

• on ne va pas appliquer la théorie des échelles de temps sur $\tilde T, c, \tilde n$, mais plutôt dire que chacune des relations i), ii), iii) est vraie ∀ échelle de temps τ_k, donc on peut remplacer τ par τ_k. Ceci impose en fait que $\tilde T, c, \tilde n$ ~~dépendent avec de temps~~ ont la même dépendance temporelle aux différentes échelles ~~ ~~ τ_k (trop forte hypothèse ? ...)

• calcul de ① à ⑧ avec $f=\frac{\tilde n}{(2\pi\tilde T)^{3/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(u-c)^2}{\tilde T}\right)$: équivalent à mettre $m=k=1$.

② $\frac{\partial f}{\partial\tilde n}=\frac{1}{\tilde n}f$

③ $\nabla_c f=\frac{1}{\tilde T}(u-c)f$

⑥ $\frac{\partial f}{\partial\tilde T}=\frac{1}{\tilde T}f\left(-\frac{3}{2}+\frac{(u-c)^2}{2\tilde T}\right)$

⑧ $\varepsilon\tilde F\cdot\nabla_u f=-\varepsilon\tilde F\cdot(u-c)\frac{1}{\tilde T}f$

⑦ $$u\cdot\nabla_x f=f\left(u\frac{\nabla_x\tilde n}{\tilde n}+u\cdot\frac{\nabla_x\tilde T}{\tilde T}\left(\frac{(u-c)^2}{2\tilde T}-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{\tilde T}\sum_{ij}u_i(u-c)_j\frac{\partial c_j}{\partial x_i}\right)$$

• on met tout ensemble :

$=-c\frac{\nabla_x\tilde n}{\tilde n}-\nabla_x c$; $=-\tilde T\frac{\nabla_x\tilde n}{\tilde n}-\nabla_x\tilde T$

$$\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k\left\{-\nabla_x(\tilde n c)\frac{1}{\tilde n}+\frac{1}{\tilde T}(u-c)\frac{1}{\cancel{\tilde n}}\left(-\cancel{\tilde n}(c\nabla x)c+\varepsilon\cancel{\tilde n}\tilde F-\nabla_x(\tilde n\tilde T)\right)+\frac{1}{\tilde T}\left(-\frac{3}{2}+\frac{(u-c)^2}{2\tilde T}\right)\left(-\frac{2}{3}\tilde T\nabla_x c-c\nabla_x\tilde T\right)\right\}$$

$$+u\frac{\nabla_x\tilde n}{\tilde n}+u\frac{\nabla_x\tilde T}{\tilde T}\left(\frac{(u-c)^2}{2\tilde T}-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{\tilde T}\sum_{ij}u_i(u-c)_j\frac{\partial c_j}{\partial x_i}-\varepsilon\tilde F(u-c)\frac{1}{\tilde T}=\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k L[\Phi_c^{(k)}]$$

$$\Rightarrow\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k\left\{-c\frac{\nabla_x\tilde n}{\tilde n}-\nabla_x c+(u-c)\frac{1}{\tilde T}\left(-(c\nabla x)c+\varepsilon\tilde F-\tilde T\frac{\nabla_x\tilde n}{\tilde n}-\nabla_x\tilde T\right)+\left(\frac{(u-c)^2}{2\tilde T}-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\nabla_x c-c\frac{\nabla_x\tilde T}{\tilde T}\right)\right\}$$

$$+u\frac{\nabla_x\tilde n}{\tilde n}+u\frac{\nabla_x\tilde T}{\tilde T}\left(\frac{(u-c)^2}{2\tilde T}-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{\tilde T}\sum_{ij}u_i(u-c)_j\frac{\partial c_j}{\partial x_i}-\varepsilon\tilde F(u-c)\frac{1}{\tilde T}=\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k L[\Phi_c^{(k)}]$$

$O(\varepsilon^2)$:
$O(\varepsilon^k)$
$k \geq 2$

$$u\,\frac{\nabla_x \tilde{n}}{\tilde{n}} + \frac{\nabla_x \tilde{T}}{\tilde{T}}\left[\left(\frac{(u-c)^2}{2\tilde{T}} - \frac{5}{2}\right)(u-c) - \left(\frac{(u-c)^2}{2\tilde{T}} - \frac{3}{2}\right)u\right]$$
$$+ \frac{1}{\tilde{T}}\left[\left((u-c)(u-c) - \frac{(u-c)^2}{3}\mathbb{1}\right) : \Lambda - \sum_{ij} u_i (u-c)_j \frac{\partial c_j}{\partial x_i} + (u-c)\tilde{F}\right] = L\left[\Phi_c^{(k)}\right]$$

et il en est de même pour les ordres supérieurs. A nouveau, par linéarité :

$$\Phi_c^{(k)} = \Phi_c^{(0)} + \Phi_c^{(k,0)}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{u\,\frac{\nabla_x \tilde{n}}{\tilde{n}} - \frac{\nabla_x \tilde{T}}{\tilde{T}}\left(\frac{(u-c)^2}{2\tilde{T}} - \frac{3}{2}\right)u - \frac{1}{\tilde{T}}\sum_{ij} u_i (u-c)_j \frac{\partial c_j}{\partial x_i}}_{\circledast} + \frac{1}{\tilde{T}}(u-c)\tilde{F} = L\left[\Phi_c^{(k,0)}\right]$$

- or, $\Phi_c^{(1,0)}$ satisfait, par linéarité, ~~...~~ la partie $\circledast$, d'où en posant :

$$\Phi_c^{(k,0)} = \Phi_c^{(1,0)} + \Phi_c^{(k,1,0)}$$

$$\frac{1}{\tilde{T}}(u-c)\tilde{F} = L\left[\Phi_c^{(k,1,0)}\right]$$

- ce qui est valable $\forall k \geq 2$, donc on peut remplacer k par 2 et on a en résumé :

$$\boxed{\begin{aligned} \Phi_c^{(k)} &= \Phi_c^{(0)} + \Phi_c^{(1,0)} + \Phi_c^{(2,1,0)} \\ \frac{1}{\tilde{T}}(u-c)\tilde{F} &= L\left[\Phi_c^{(2,1,0)}\right] \end{aligned}}$$

- Changeons de notations, et résumons le tout :

$O(\varepsilon^0)$: $\dfrac{\nabla_x \tilde{T}}{\tilde{T}}\left(\dfrac{(u-c)^2}{2\tilde{T}} - \dfrac{5}{2}\right)(u-c) + \dfrac{1}{\tilde{T}}\left((u-c)(u-c) - \dfrac{(u-c)^2}{3}\mathbb{1}\right) : \Lambda = L\left[\Phi^{(0)}\right]$

$\Phi^{(0)}$: connu : c'est l'équation donnée sans théorie des échelles de temps.

$O(\varepsilon^1)$ $\Phi^{(1)} = \Phi^{(0)} + A$.

$$u\,\frac{\nabla_x \tilde{n}}{\tilde{n}} - \frac{\nabla_x \tilde{T}}{\tilde{T}}\left(\frac{(u-c)^2}{2\tilde{T}} - \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{\tilde{T}}\left(\sum_{ij} u_i (u-c)_j \frac{\partial c_j}{\partial x_i}\right) = L[A]$$

↳ peut étudier A grâce à la linéarité de L ; cf. Berne.

$O(\varepsilon^k), k \geq 2$ $\Phi^{(k)} = \Phi^{(0)} + A + B$

↓ seul ordre où apparaît la force

$$\frac{1}{\tilde{T}}(u-c)\tilde{F}\!M = L[B]$$

↳ peut trouver B grâce à la linéarité de L, cf. Berne.

- pourquoi la force apparaît ici seulement pour $\varepsilon^k, k \geq 2$, alors que dans le modèle homogène c'était pour $k=1$ seulement ?
  → voir l'origine de ces termes : l'application de la théorie des échelles multiples de temps avec la discrétisation temporelle tue ce terme à l'ordre ε^1 et l'ajoute aux ordres suivants. Pourquoi ce terme n'était pas tué dans le modèle homogène ? Parce que la dérivée temporelle s'annulait par indépendance de f par rapport au temps

$\Longrightarrow$ est-ce que ce modèle homogène a bien un sens ? ! !

La solution finale s'écrit donc :

$$\Phi_c = \sum_{k \geq 0} \Phi_c^{(k)} = \Phi_c^{(0)} + \varepsilon\Phi_c^{(0)} + \varepsilon A + \varepsilon^2 \Phi_c^{(0)} + \varepsilon^2 A + \varepsilon^2 B$$
$$+ \sum_{k \geq 3} \varepsilon^k \Phi_c^{(0)} + \sum_{k \geq 3} \varepsilon^k A + \sum_{k \geq 3} \varepsilon^k B$$
$$= \Phi_c^{(0)} \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k + A \sum_{k \geq 1} \varepsilon^k + B \sum_{k \geq 2} \varepsilon^k$$

On obtient finalement :

nouveau terme ni de viscosité, ni de conduction thermique

nouveau terme de conduction thermique ①

$$\boxed{\begin{aligned}\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k\Bigg\{ &(1-\delta_{k0})\, u\cdot\frac{\nabla_x \tilde{n}}{\tilde{n}} + \frac{\nabla_x \tilde{T}}{\tilde{T}}\left[\left(\frac{(u-c)^2}{2\tilde{T}}-\frac{5}{2}\right)(u-c) + (\delta_{k0}-1)\left(\frac{(u-c)^2}{2\tilde{T}}-\frac{3}{2}\right)u\right] \\ &+ \frac{1}{\tilde{T}}\left[\left((u-c)(u-c)-\frac{(u-c)^2}{3}\mathbb{1}\right):\Lambda + (\delta_{k0}-1)\left(\sum_{ij} u_i (u-c)_j \frac{\partial c_j}{\partial x_i} - \varepsilon (u-c)\tilde{F}\right)\right]\Bigg\} \\ &= \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k L[\Phi_c^{(k)}]\end{aligned}}$$

nouveau terme de viscosité ②

On voit : calcul normal, auquel s'ajoutent des corrections pour $k>0$ (I)

Cette relation peut aussi s'écrire en mettant tout sous la même forme avec $k=0$ (i.e. ce qu'on trouverait sans la théorie des échelles multiples). On a :

$$① = (\delta_{k0}-1)\left(\left(\frac{(u-c)^2}{2\tilde{T}}-\frac{5}{2}\right)(u-c) + \left(\frac{(u-c)^2}{2\tilde{T}}-\frac{5}{2}\right)c + u\right)$$

pas bon

$$② = (\delta_{k0}-1)\left(\left((u-c)(u-c) - \tfrac{1}{3}(u-c)^2\mathbb{1}\right):\Lambda + (u-c)(c\nabla_x)c + \tfrac{1}{3}(u-c)^2\mathbb{1}:\Lambda - \varepsilon(u-c)\tilde{F}\right)$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k\Bigg\{ &(1-\delta_{k0})\,u\frac{\nabla_x \tilde{n}}{\tilde{n}} + \frac{\nabla_x \tilde{T}}{\tilde{T}}\left[\left(\frac{(u-c)^2}{2\tilde{T}}-\frac{5}{2}\right)(u-c)\,\delta_{k0} + (\delta_{k0}-1)\left(\left(\frac{(u-c)^2}{2\tilde{T}}-\frac{5}{2}\right)c + u\right)\right] \\ &+ \frac{1}{\tilde{T}}\left[\left((u-c)(u-c)-\frac{(u-c)^2}{3}\mathbb{1}\right):\Lambda\,\delta_{k0} + (\delta_{k0}-1)\left((u-c)(c\nabla_x)c + \tfrac{1}{3}(u-c)^2\mathbb{1}:\Lambda - \varepsilon(u-c)\tilde{F}\right)\right]\Bigg\} \\ &= \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k L[\Phi_c^{(k)}]\end{aligned}$$

Cette dernière écriture est plus agréable pour égaler les équations aux différents ordres en ε^k ($k\neq 0$) : (bof..)

$O(\varepsilon^0)$:

$$\boxed{\frac{\nabla_x \tilde{T}}{\tilde{T}}\left(\frac{(u-c)^2}{2\tilde{T}}-\frac{5}{2}\right)(u-c) + \frac{1}{\tilde{T}}\left((u-c)(u-c)-\frac{(u-c)^2}{3}\mathbb{1}\right):\Lambda = L[\Phi_c^{(0)}]}$$

C'est la même équation que dans les livres $\Rightarrow$ mêmes coefficients pour de petites échelles de temps.

$O(\varepsilon^1)$:

$$\boxed{u\cdot\frac{\nabla_x \tilde{n}}{\tilde{n}} + \frac{\nabla_x \tilde{T}}{\tilde{T}}\left(\left(\frac{(u-c)^2}{2\tilde{T}}-\frac{5}{2}\right)c + u\right) + \frac{1}{\tilde{T}}\left((u-c)(c\nabla_x)c + \tfrac{1}{3}(u-c)^2\mathbb{1}:\Lambda\right) = L[\Phi_c^{(1)}]}$$

· Difficultés : présence de $u\frac{\nabla_x \tilde{n}}{\tilde{n}}$, et coefficient de $1/\tilde{T}$ ne se factorise à priori pas avec $:\Lambda$

· autre manière d'écrire cette équation : déviation à l'ordre ε^0 : avec (I) :

$$u\frac{\nabla_x \tilde{n}}{\tilde{n}} + \frac{\nabla_x \tilde{T}}{\tilde{T}}\left[\left(\frac{(u-c)^2}{2\tilde{T}}\right)(u-c) \mp \left(\frac{(u-c)^2}{2\tilde{T}}-\frac{3}{2}\right)u\right] + \frac{1}{\tilde{T}}\left[\left((u-c)(u-c)-\frac{(u-c)^2}{3}\mathbb{1}\right):\Lambda \mp \sum_{ij} u_i(u-c)_j\frac{\partial c_j}{\partial x_i}\right] = L[\Phi_c^{(1)}]$$

linéarité de l'équation $\Longrightarrow$

$$\boxed{\Phi_c^{(1)} = \underbrace{\Phi_c^{(0)}}_{\text{connu}} + \Phi_c^{(1,0)}}$$

↳ coefficients connus

$\Longrightarrow$

$$\boxed{u\frac{\nabla_x \tilde{n}}{\tilde{n}} \mp \frac{\nabla_x \tilde{T}}{\tilde{T}}\left(\frac{(u-c)^2}{2\tilde{T}}-\frac{3}{2}\right)u \mp \frac{1}{\tilde{T}}\left(\sum_{ij} u_i(u-c)_j\frac{\partial c_j}{\partial x_i}\right) = L[\Phi_c^{(1,0)}]}$$

problème plus facile à résoudre que l'équation précédente.

et les coefficients sont donnés par :

$$\lambda^{(1)} = \lambda^{(0)} + \lambda^{(1,0)}$$
$$\eta^{(1)} = \eta^{(0)} + \eta^{(1,0)}$$

$$\Phi_c \overset{\varepsilon<1}{=} \Phi_c^{(0)} \frac{1}{1-\varepsilon} + A \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k - A + B \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k - B - B\varepsilon$$

$$= \Phi_c^{(0)} \frac{1}{1-\varepsilon} + A \underbrace{\left(\frac{1}{1-\varepsilon} - 1\right)} + B \underbrace{\left(\frac{1}{1-\varepsilon} - 1 - \varepsilon\right)}$$

$$= \frac{1}{1-\varepsilon} - \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

$$= \frac{1}{1-\varepsilon} - \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon} - \frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{1-\varepsilon} = \frac{1-1+\varepsilon-\varepsilon(1-\varepsilon)}{1-\varepsilon} = \frac{\varepsilon-\varepsilon+\varepsilon^2}{1-\varepsilon} = \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon}$$

$$\boxed{\Phi_c = \Phi_c^{(0)} \frac{1}{1-\varepsilon} + A \cdot \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} + B \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon}} = \frac{1}{1-\varepsilon}\left(\Phi_c^{(0)} + \varepsilon A + \varepsilon^2 B\right)$$

- mais en fait ce qui nous intéresse plutôt c'est $\Phi_c^{(k)}$, par trouver le coefficient à un certain ordre.
- à nouveau, on voit que la solution exacte ssi $\varepsilon < 1$, i.e. si l'én. thermique > én. du champ F.

Formule utile: si $f = n(r,t) \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2kT}v^2}$, alors:

$$\int d^3v\, (v)^n \cdot f = n(r,t) \frac{(n-1)!!}{2^{\frac{n-4}{2}}} \left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$

Cette solution montre aussi que plus les fluctuations thermiques sont grandes vis-à-vis de l'énergie du champ de force, plus Φ_c décrivant les courants diminue. Cette interprétation est bien cohérente car si il n'y a que des fluctuations thermiques, les courants doivent en moyenne être nuls.

Calcul des solutions :

$O(\varepsilon^0)$: calcul standard dans la littérature. L'équation à résoudre est :

$$\frac{\nabla_x \tilde{T}}{\tilde{T}}\left(\frac{(u-c)^2}{2\tilde{T}}-\frac{5}{2}\right)(u-c) + \frac{1}{\tilde{T}}\left((u-c)(u-c)-\frac{(u-c)^2}{3}\mathbb{1}\right):\Lambda = L[\Phi^{(0)}]$$

L étant un opérateur isotrope, une séparation de variables angulaires et radiales est possible et on obtient les Ψ_{nlm} de (2.46). On peut ainsi montrer que $\Phi^{(0)}$ est de la forme, en posant $W = u-c$

$$\boxed{\Phi^{(0)} = C(W^2)\, W \frac{\nabla_x \tilde{T}}{\tilde{T}} + D(W^2)\frac{1}{\tilde{T}}\left(W\cdot W - \frac{W^2}{3}\mathbb{1}\right):\Lambda + \underbrace{\Phi^{(0)}_{ker}}_{=0}} \quad (1)$$

En insérant cette forme d'équation dans l'équation à l'ordre ε^0 on obtient 2 équations permettant de déterminer $C(w^2)$ et $D(w^2)$:

$$\boxed{\begin{aligned} L[C(w^2)W] &= \left(\frac{W^2}{2\tilde{T}}-\frac{5}{2}\right)W \\ L\left[D(W^2)\left(WW-\frac{W^2}{3}\mathbb{1}\right)\right] &= W\cdot W - \frac{W^2}{3}\mathbb{1}\end{aligned}} \quad (2)$$

Maintenant, on remarque que pour un gaz de Maxwell

$$\begin{cases} L[\Psi_{11m}(X)] \sim \Psi_{11m}(X) \\ \Psi_{11m}(X) \sim S^{(1)}_{3/2}(X)\cdot X = \left(O(X^0)+O(X^1)\right)\cdot X \end{cases} \quad (3)$$

et aussi :

$$\begin{cases} L[\Psi_{02m}(X)] \sim \Psi_{02m}(X) \\ \Psi_{02m}(X) \sim S^{(0)}_{5/2}(X)\cdot X^2 = O(X^0)\cdot X^2 \end{cases} \quad (4)$$

Pour revenir à notre problème, l'équation (2) pour $C(W^2)$ est

$$L[C(w^2)W] = \left(O(w^0)+O(w^2)\right)\cdot W, \quad (5)$$

donc avec (3)

$$L[\Psi_{11m}(X^2)] \overset{(3)}{\sim} L[S^{(1)}_{3/2}(X^2)\,X] \overset{(3)}{\sim} \left(O(X^0)+O(X^2)\right)\cdot X \quad (6)$$

d'où par comparaison de (5) et (6) on en conclut que la solution $C(W^2)W$ est engendrée par $S^{(1)}_{3/2}(W^2)W$, c'est-à-dire

$$C(W^2)W \sim S^{(1)}_{3/2}(W^2)W. \quad (7)$$

De même, ~~l'équation~~ la seconde équation de (2) est

$$L[D(w^2)W^2] \sim O(W^2) \quad (8)$$

donc avec (4)

$$L[\Psi_{02m}(X)] \overset{(4)}{\sim} L[S^{(0)}_{5/2}(X)\,X^2] \overset{(4)}{\sim} O(X^0)\cdot X^2, \quad (9)$$

d'où par comparaison de (8) et (9) on en conclut que la solution $D(W^2)W$ est engendrée par $S^{(0)}_{5/2}(W^2)W$, c'est-à-dire

$$D(W^2)W \sim S^{(0)}_{5/2}(W^2)W. \quad (10)$$

Développons $C(W^2)$ et $D(W^2)$ dans la base des fonctions propres Ψ_{nem}

$$\begin{cases} C(w^2) = \sum_{n\geq 0} c_n\, S^{(n)}_{3/2}(W^2) \\ D(W^2) = \sum_{n\geq 0} d_n\, S^{(n)}_{5/2}(W^2) \end{cases} \quad (11)$$

Dans ces développements, seul l'indice n apparait car les autres indices ℓ et m sont liés aux harmoniques sphériques Y_ℓ^m dont notre solution ~~[illegible]~~ radiale est indépendante. Grâce aux résultats (7) et (10), on voit que $C(W^2)$ est proportionnel à $S^{(1)}_{3/2}(W^2)$ et $D(W^2)$ à $S^{(0)}_{5/2}(W^2)$, donc dans les développements (11), seuls c_1 et d_0 sont non nuls pour un gaz de Maxwell :

$$\boxed{\begin{aligned} C(W^2) &= c_1\, S^{(1)}_{3/2}(W^2) \\ D(W^2) &= d_0\, S^{(0)}_{5/2}(W^2) \end{aligned}}$$